MATEMÁTICA

CADERNOS DE AULA

MÚCIO LIMA
ELÍDIO VANZELLA

OPEN ACCESS

MATEMÁTICA
CADERNOS DE AULA

Múcio de Araújo Lima

Elídio Vanzella

Organização

Editora do CCTA
João Pessoa
2019

Produção Gráfica e Capa
ELÍDIO VANZELLA

Ficha catalográfica

Ficha catalográfica elaborada na Biblioteca Setorial do CCTA da Universidade Federal da Paraíba

L739m Lima, Múcio de Araújo.
Matemática: cadernos de aula [recurso eletrônico] / Múcio de Araújo Lima, Elídio Vanzella. – João Pessoa: Editora do CCTA, 2019.

Recurso digital (1.401KB)
Formato: ePDF
Requisito do Sistema: Adobe Acrobat Reader
ISBN: 978-85-9559-186-8

1. Matemática. 2. Conjuntos. 3. Limites. 4. Derivadas. 5. Cálculo Integral. I. Vanzella, Elídio. II. Título.

UFPB/BS-CCTA CDU: 51

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Depósito legal na Biblioteca Nacional, conforme decreto n° 1.825, de 20 de dezembro de 1907.

PREFÁCIO

Confesso que o convite para escrever o prefácio da obra **Matemática: cadernos de aula** foi um grande desafio, uma vez que a matemática sempre foi uma área de estudo intrigante e complexa, mas, ao ler o livro e ver a forma como se apresentam os conceitos, o sentimento de insegurança deu lugar à sensação de que finalmente encontrei uma obra que pudesse me conquistar nos campos das exatas.

A Matemática tem sido um desafio e, muitas vezes, considerada uma vilã, um mal necessário, considerada por muitos como um obstáculo nos estudos.

Mas, não há como se fugir da matemática, ela está presente no cotidiano, quer seja em termos pessoais ou profissionais e quanto antes a entendermos melhor será para nossa vida.

É isso que propõem os autores Múcio Lima e Elídio Vanzella: mostrar uma matemática empolgante, presente no dia a dia, e que pode ser vista como uma aliada quando bem compreendida.

Pode-se dizer mais, é isso que os autores conseguem com essa obra: mostrar aos leitores a matemática de uma forma interessante, despertando a curiosidade e aproximando-os desse universo tão misterioso e tão desafiador.

A formação e as experiências profissionais dos autores contribuem decisivamente para a excelência desse livro: Múcio Lima é formado em matemática com experiência na área da Ciência da Computação, enquanto Elídio Vanzella tem doutorado na área de Modelos de Decisão e Saúde, com atuação na área docente de estatística e logística. Ao mesmo tempo em que possuem uma formação sólida no campo da Matemática, dominam a prática pedagógica e mercadológica, o que possibilita uma linguagem acessível aos interessados em conhecer ou se aprofundar nos ensinamentos matemáticos. O perfil desses autores contribuiu decisivamente para que a obra **Matemática: cadernos de aula** estivesse ao alcance de todos e para a aproximação desse campo tão temido, que é o das Ciências Exatas, a nós simples mortais.

Recomendo vivamente a leitura!

Adriana Brambilla
Doutora em estudos culturais
Pela Universidade de Aveiro, Portugal.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Conjuntos

A primeira ideia que associamos à palavra ***conjunto*** *é de coleção ou agrupamento de coisas, tal associação é motivada pelas experiências que vivenciamos cotidianamente, porém do ponto de vista matemático é possível encontrarmos conjuntos formados por apenas um só elemento ou mesmo sem nenhum elemento.*

1.1. Conjuntos

Tudo que constitui um conjunto é denominado *elemento* do conjunto.

O modo mais comum para se representar um conjunto é o seguinte: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

- ♣ Uma letra maiúscula qualquer (A);
- ♣ Seus elementos entre chaves ({ })

Se ***x*** é um elemento de um conjunto A, dizemos então que ***x*** *pertence* a este conjunto, e simbolicamente escrevemos: $x \in A$ (lê-se: *x pertence a A)*, caso contrário, isto é, se ***x*** *não* é elemento do conjunto A, dizemos que ***x*** *<u>não pertence</u>* e simbolicamente escrevemos: $x \notin A$ (lê-se: *x não pertence a A*).

Exemplo:

1) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$, temos que:
   - $2 \in A \rightarrow$ lê-se: 2 pertence ao conjunto A.
   - $5 \notin A \rightarrow$ lê-se: 3 não pertence ao conjunto A.

- Um conjunto com um só elemento é denominado *<u>conjunto unitário</u>*.
- Um conjunto que não tem elemento é denominado *<u>conjunto vazio</u>* e é simbolizado por ∅ ou { }.

Se um conjunto possui uma quantidade finita de elementos então dizemos que ele é *<u>FINITO</u>*, caso contrário, isto é se o conjunto possui uma quantidade infinita de elementos, então ele é dito *<u>INFINITO</u>*.

Para indicar que um conjunto possui uma quantidade infinita de elementos utiliza-se reticências (...).

Exemplo: $A = \{1, 2, 3 \ldots\}$

- Outro modo de se representar um conjunto é através de uma propriedade que relacione todos os seus elementos.

Exemplo:

- $A = \{x \mid x \text{ é } par\} \Leftrightarrow A = \{2, 4, 6 \ldots\}$
  - O símbolo "|" lê-se: "tal que".

Exercícios - 1.1

1) Escreva os elementos dos conjuntos abaixo:

a) O conjunto de todos os números naturais menores que 5.

b) O conjunto de todos os números naturais existentes entre 3 e 9.

c) O conjunto de todos os números naturais maiores que 5 e menores que 15.

d) O conjunto de todos os números naturais maiores que 7.

e) O conjunto de todos os números pares menores que 10.

2) Escreva os elementos dos conjuntos abaixo:

a) A = {x | x é vogal}

b) B = {x | x é múltiplo natural de 2}

c) C = {x | x é divisor natural de 12}

d) D = {x | x é múltiplo natural de 3 e menor que 20}

e) E = {x | x é natural ímpar e menor que 10}

3) Escreva os conjuntos abaixo por meio de uma propriedade comum aos seus elementos.

a) H = {0, 1, 2, 3, 4}

b) W = {5, 6, 7, 8}

c) T = {0, 5, 10, 15, 20}

d) P = {2, 4, 6, 8}

e) M = {3}

1.2. Relação entre conjuntos

♦ **Igualdade**

"Se dois ou mais conjuntos possuem os mesmos elementos dizemos que eles são iguais".

Exemplo:

- A = {x | x é letra da palavra IRACEMA} ≡ {I,R,A,C,E,M}
- B = {x | x é letra da palavra AMERICA}≡ {A,M,E,R,I,C}

Observe que todo elemento de A também é elemento de B.

✍ *Não se repete elementos em conjunto.*

♦ **Subconjuntos**

"Se todo elemento de A é elemento de B, então dizemos que A é subconjunto de B, e indicamos por $A \subset B$".

Exemplo:

Seja A = {0, 1, 2, 3}, B = {0, 2} e C = {0, 1, 4}.

Temos:

$B \subset A \leftarrow$ lê-se: B está contido em A.

$C \not\subset A \leftarrow$ lê-se: C <u>não</u> está contido em A ($4 \notin A$).

♦ **Conjunto das partes de um conjunto**

Dado um conjunto A qualquer podemos, de antemão, saber quantos subconjuntos podemos extrair de A. O conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto A é denominado *Conjunto das Partes de A*, e simbolizamos por *P(A)*, para calcularmos o número de subconjunto de A basta aplicar a seguinte fórmula:

- $n(P(A)) = 2^{(\text{número de elementos de A})}$ (lê-se: número de partes de A)

Exemplo:

Seja A = {x | x da palavra AMOR}, quantos subconjuntos podemos extrair de A?

Resposta:

$$n(P(A)) = 2^4 = 2.2.2.2 = 16.$$

Questão:

P(A) = {∅, {A}, {M}, {O}, {R}, {A,M}, {A,O}, {A,R}, {M,O}, {M,R}, {O,R}, {A,M,O}, {A,M,R}, {A,O,R}, {M,O,R}, {A,M,O,R}}

✍ *O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.*

Exercícios – 1.2

1) Dado A = {0, 1, 2}, quantos são os subconjuntos de A?

2) Escreva o conjunto das partes do conjunto A = {0, 1, 2}

3) Forme o conjunto das partes de:
   a) A = {1, 5}
   b) B = {2, 4, 6, 8}
   c) C = {a, e, i, o, u}
   d) D = {7}

7) Determine quantos subconjuntos possui o conjunto E nos seguintes casos:
   a) Se E tem 1 elemento;
   b) Se E tem 2 elementos;
   c) Se E tem 5 elementos;
   d) Se E tem 8 elementos.

8) Se um conjunto H possui 64 subconjuntos, então quantos elementos têm H?

9) Se um conjunto G possui 32 subconjuntos, então quantos elementos têm G?

10) Se um conjunto B possui 256 subconjuntos, quantos elementos têm B?

1.3. Operações entre conjuntos

♦ ***Intersecção entre Conjuntos***

Denominamos *intersecção* dos conjuntos **A** e **B** que indicamos por **A** $\cap$ **B** (lê-se: A inter B) ao conjunto formado pelos elementos comuns ao conjunto **A** quanto a **B**.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ e \ x \in B\}$$

Exemplo

Seja A = {1, 3, 5, 7, 9} e B = {2, 3, 5, 6, 7, 10, 13}, encontre A $\cap$ B.

Resp. A $\cap$ B = {3, 5, 7}

✍ Se A $\cap$ B = $\varnothing$, dizemos que os conjuntos A e B são DISJUNTOS.

♦ ***União entre Conjuntos***

Denominamos *união* dos conjuntos **A** e **B** que indicamos por **A** $\cup$ **B** (lê-se: A união B) ao conjunto formado pelos elementos que pertençam ao conjunto **A** ou ao conjunto **B**.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ ou \ x \in B\}$$

Exemplo

Dado A = {0, 1, 3, 5, 9} e B = {0, 1, 2, 4, 5, 6, 7}, encontre A ∪ B.

Resp. A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9}

✍ O número de elementos de A ∪ B é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

♦ ***Diferença e Complementar entre Conjuntos***

Denominamos *diferença* entre os conjuntos **A** e **B**, e que indicamos por **A – B**, ao conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto **A** e não pertencem ao conjunto **B.**

$$A - B = \{x \mid x \in A \ e \ x \notin B\}$$

Exemplo

Dado A = {0, 1, 3, 5, 9} e B = {0, 2, 4, 5, 6, 7, 10}, encontre A - B.

Resp. A – B = {1, 3, 9}

- Se B $\subset$ A, a diferença **A** – **B** denomina-se *Complementar de **B** em **A*** e indicamos por :

$$C_A^B = \overline{B} = B' = B^C$$

Exemplo

Dado A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9} e B = {0, 2, 4, 6, 8}, encontre A – B.

Resp. $C^B{}_A = \{1, 3, 5, 9\}$

Exercícios – 1.3

1) Dados os diagramas abaixo encontre os conjuntos:

a) A

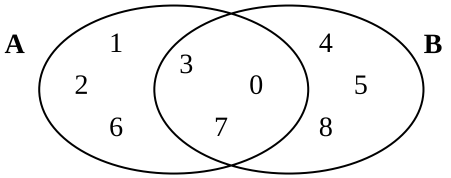
b) B

c) $A \cup B$

d) $A \cap B$

e) $A - B$

f) $B - A$



2) Seja $A = \{1,4,6,7,8\}$, $B = \{2,4,5,7,9\}$ e $C = \{0,3,5,6,7\}$, encontre:

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $B \cup C$

d) $A \cup B \cup C$

e) $A \cap B$

f) $A \cap C$

g) $B \cap C$

h) $A \cap (B \cap C)$

i) $A - B$

j) $A - C$

l) $B - C$

m) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

n) $C \cap (A - B)$

o) $B - (A \cup B)$

p) $(A \cap B) \cup (B - C)$

q) $A \cup \varnothing$

r) $A \cap \varnothing$

s) $C_{(A \cup B)}^{(A \cap B)}$

3) Seja $A = \{1,2,4,5,7\}$, $B = \{2,4\}$ e $C = \{3,6,8\}$, determinar:

a) $A \cup B$

b) $A \cup C$

c) $B \cup C$

d) $A \cup B \cup C$

e) $A \cap B$

f) $A \cap C$

g) $B \cap C$

h) $A \cap (B \cup C)$

i) $A - B$

j) $A - C$

l) $B - C$

m) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

n) $C \cap (A - B)$

o) $B - (A \cup B)$

p) $(A \cap B) \cup (B - C)$

q) C_A^B

4) Dado $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{6, 7, 9, 10\}$ e $C = \{4, 5, 6, 7\}$.

Determine:

a) $(A \cap B \cap C)^C$

b) $(A \cup B \cup C)^C$

c) $(A \cup B)^C - C$

d) $(A \cap C)^C - B^C$

e) $A - (B \cup C)^C$

1.4. Conjuntos numéricos

Conjunto dos Números Naturais (**N**)

N= {0, 1, 2, 3, 4, 5, ... }

Subconjunto de **N**

Conjunto dos Números Naturais não-nulos

$\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\} \Rightarrow \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Conjunto dos Números Inteiros Relativos (**Z**)

$\mathbf{Z} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Subconjuntos de **Z**

Conjunto dos Números Inteiros Relativos não-nulos

$\mathbf{Z}^* = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Conjunto dos Números Inteiros Relativos não-negativos

$\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Conjunto dos Números Inteiros Relativos Positivos

$\mathbf{Z}^*_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Conjunto dos Números Inteiros Relativos não-positivos

$\mathbf{Z}_- = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

Conjunto dos Números Inteiros Relativos Negativos

$\mathbf{Z}\ast_{-} = \{ \ldots -5, -4, -3, -2, -1\}$

Conjunto dos Números Racionais (**Q**)

$\mathbf{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbf{Z} \text{ e } b \in \mathbf{Z}\ast\}$ Todo número que pode ser escrito em forma de fração.

Inteiros: ex. $\frac{5}{1} = 5$

Decimais exatos: ex. $0{,}5 = \frac{5}{10}$

Dízimas Periódicas: ex. $0{,}777\ldots = \frac{7}{9}$, $0{,}1222\ldots = \frac{11}{90}$

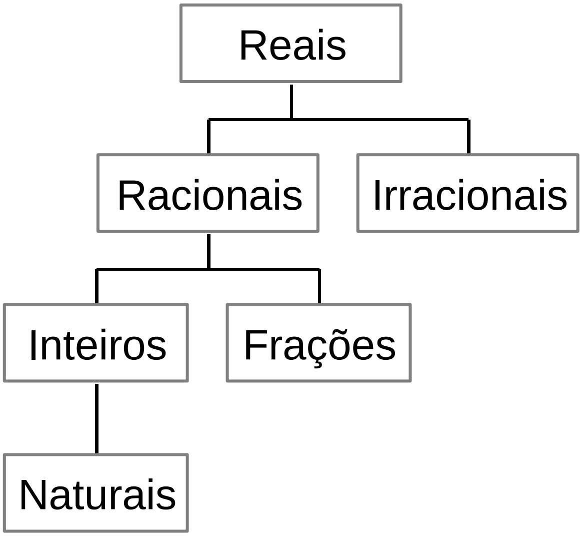
♦ *Conjunto dos Números Irracionais*

Denomina-se de *números irracionais* a todo número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, ou seja, que não podemos representá-lo na forma de fração.

ex. $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}732050\ldots$, $\pi = 3{,}141592\ldots$

♦ <u>*Conjunto dos Números Reais*</u> *(R)*

O conjunto dos números reais é formado pela união do conjunto dos números racionais e irracionais, isto é: ***R*** **= Q ∪ Irracionais**. Para uma melhor compreensão observe o diagrama abaixo.



- A melhor representação do conjunto dos números reais é uma reta.
- E seus subconjuntos são segmentos de retas, denominados intervalos.

- <u>Fechado nos extremos</u>
    - Notação: $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$
    - Representação:

- <u>Aberto nos extremos</u>
    - Notação: $]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$
    - Representação:

- <u>Semifechado ou semiaberto nos extremos</u>
    - Notação: $[a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ (fechado a esquerda e aberto a direita)
    - Representação:

    - Notação: $]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ (fechado a direita e aberto a esquerda)
    - Representação:

Exercícios – 1.4

1) Determine os elementos dos conjuntos abaixo:

   a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 < x < 9\}$

   b) $B = \{x \in \mathbf{Z} \mid -3 < x \leq 3\}$

   c) $C = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 5\}$

   d) $D = \{x \in \mathbf{Z} \mid x < 2\}$

   e) $E = \{x \in \mathbf{Z} \mid x > -3\}$

2) Represente os conjuntos abaixo na forma de intervalo:

   a) $H = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 < x < 3\}$

   b) $M = \{x \in \mathbf{R} \mid -4 \leq x < 2\}$

   c) $P = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 5\}$

   d) $S = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leq x \leq 6\}$

   e) $T = \{x \in \mathbf{R} \mid -7 < x\}$

3) Represente os intervalos abaixo na forma de conjuntos:

   a) $A = [-1, 8]$

   b) $G =]0, 3]$

   c) $F = [-2, 7[$

   d) $K =]-3, 5[$

   e) $L =]-\infty, 2]$

   f) $J =]-3, +\infty[$

Capítulo 2

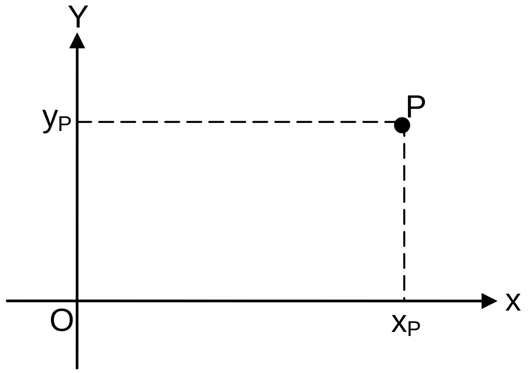
Funções

2.1. O Plano Cartesiano – Par Ordenado

Plano Cartesiano é plano determinado pela intersecção de duas retas ortogonais entre si.

Essas retas são denominadas *eixos*; eixo *0x* e eixo *0y*.

Observe a figura abaixo



O ponto P é localizado no plano por meio das coordenadas x_P (sua abscissa) e y_P (sua ordenada), isto é, P(x_P, y_P).

- O ponto de encontro dos eixos é a *origem* do plano cartesiano.
- As abscissas a esquerda da origem são negativas e as da direita positivas.
- As ordenadas acima da origem são positivas e as abaixo negativas
- O par de números que representa um ponto é denominado *Par Ordenado*.

✍ No par ordenado a abscissa *sempre* vem em primeiro lugar.

Exercícios 2.1

1) Construa um plano cartesiano e localize os pontos: A(1, 3), B(-2, 1), C(4, 0), D(-1, -3), E(2, -4), F(3, 3), G(0, 5), H(-3, 0), I(0, -3), J(-1, 2), L(-3, -2)e M(4, 1).

2.2. Produto cartesiano – Representação gráfica

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chama-se produto cartesiano de A por B o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), tais que x pertence a A e y pertence a B. Indica-se por A x B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \ e \ y \in B\}$$

Exemplo 1

Seja A = $\{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 2\}$ e B = $\{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x < 5\}$, encontrar A × B.

Resposta

A = {0, 1, 2}

B = {1, 2, 3, 4}

A × B = {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)}

Número de Elementos

O número de elementos de um produto cartesiano A × B é dado pelo produto entre o número de elementos de A e de B, isto é: N (A × B) = N (A) . N (B)

Do exemplo acima temos: N (A × B) = 3 . 4 = 12

Representação Gráfica de A × B

No plano cartesiano marcamos:

- Os números do primeiro conjunto no eixo dos x;
- Os números do segundo conjunto no eixo dos y;
- Os pares ordenados (x, y) do produto cartesiano A × B representam pontos do plano.

E x e r c í c i o s - 2.2

1) Seja $A = \{0, 1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, obtenha:

   a) $A \times B$

   b) $B \times A$

   c) A^2

   d) B^2

2) Quantos elementos tem $A \times B$, sendo $A = \{x \in Z \mid -2 < x < 5\}$ e $B = \{x \in N \mid 1 < x \leq 4\}$.

2.3. Relação – Representação Gráfica

Dado um conjunto A e um conjunto B, não vazios, chama-se **relação** de A em B a todo subconjunto de A × B.

<u>Exemplo</u>

Dados $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, obtenha $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

Resposta: $R = \{(1, 2), (2, 4)\}$

Domínio de uma relação de A e B é o conjunto formado por todos os **primeiros** elementos dos pares da relação.

Do exemplo acima: $D(R) = \{1, 2\}$

Conjunto imagem de uma relação de a em B é o conjunto formado por todos os **segundos** elementos dos pares ordenados da relação.

Do exemplo acima: $Im(R) = \{2, 4\}$

Exercícios - 2.3

1) Represente graficamente A × B, sendo

   $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$

2) Represente graficamente A × B, sendo

   $A = \{x \in Z \mid -1 \leq x \leq 3\}$ e $B = = \{x \in N \mid 0 < x \leq 3\}$

3) Represente graficamente A × B, sendo

   $A = \{x \in Z \mid -2 \leq x < 3\}$ e $B = = \{x \in N \mid 2 < x \leq 3\}$

2.4. Função – Representação Gráfica

Uma *função* de A em B é toda *relação* de A × B que obedece a duas condições:

- todo elemento de A tem um correspondente em B;
- cada elemento de A tem **apenas um** correspondente em B.

Notação

É comum indicarmos uma função de A em B através da segunte notação:

f: A → B (lê-se: f é função de A em B)

x → y = f(x)

Domínio, Contradomínio e Imagem

- **Domínio** de uma função de A em B é o conjunto formado por todos os elementos do conjunto A. É indicado por D ou D_f. Temos $D_f = A$.

- **Contradomínio** de uma função de A em B é o conjunto formado por todos os elementos do conjunto B. É indicado por CD ou CD_f. Temos $CD_f = B$.
- **Conjunto Imagem** de uma função de A em B é o conjunto formado por todos os elementos de B que estão associados a algum elemento de A. É indicado por Im ou Im_f.

Exemplo

Seja f uma função de A = {0, 1, 2, 3} em B = {0, 1, 2, 3, 4, 5} definida por y = x + 1.

$D_f = A = \{0, 1, 2, 3\}$

$CD_f = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=2 \Rightarrow y=3 \\ x=3 \Rightarrow y=4 \end{array}\right\} Im_f = \{1, 2, 3, 4\}$$

E x e r c í c i o s - 2.4

1) Dados $A = \{0, 1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, obtenha:

a) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y < 7\}$

b) $S = \{(x, y) \in A \times B \mid x \,.\, y > 10\}$

c) $T = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$

d) $Q = \{(x, y) \in B \times B \mid y = x + 2\}$

2) Encontre os conjuntos domínio e imagem das relações do exercício 2.4.

Representação Gráfica de uma relação

No plano cartesiano marcamos:

- Os números do domínio no eixo dos x;
- Os números do conjunto imagem no eixo dos y;
- Os pares ordenados (x, y) da relação representam pontos do plano

2.5. Função Constante

Definição

É toda função do tipo f(x) = uma constante (um número).

Em símbolo: f: **R** -> **R** | f(x) = k

Domínio: $D_f = \boldsymbol{R}$

Conjunto Imagem: $Im_f = \{k\}$

Gráfico

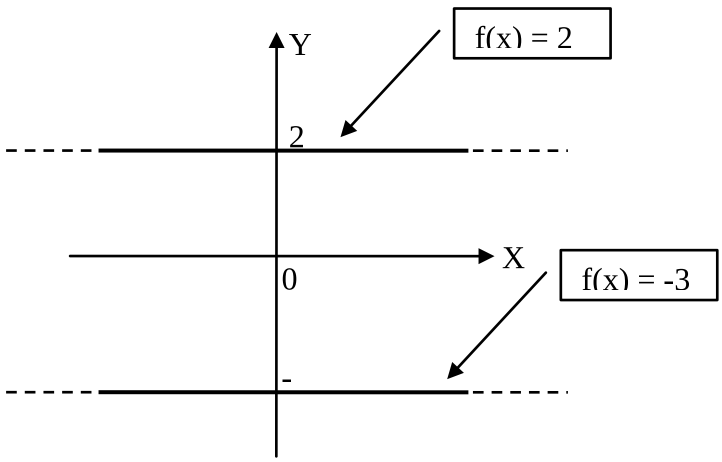
Será sempre uma reta paralela ao eixo das abscissas, passando por y = c.

Exemplo

Construa o gráfico de:

a) f(x) = 2.

b) g(x) = -3.



Exercícios - 2.5

1)Dados $A = \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, represente graficamente:

a) $\{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$

b) $\{(x, y) \in A \times B \mid x + y > 0\}$

c) $\{(x, y) \in A \times B \mid x^2 = y\}$

d) $\{(x, y) \in A \times B \mid 2y = x \}$

e) $\{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$

f) $\{(x, y) \in A \times B \mid y = -x\}$

g) $\{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt{x}\}$

h) $\{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x + - 3\}$

i) $\{(x, y) \in A \times B \mid x.y < 0\}$

2.6. Função de 1°. Grau

Função do 1° grau é toda função que associa a cada número real ***x*** o número real **a**.x + **b**, $a \neq 0$.

Em símbolos: f: **R** -> **R** | $f(x) = a.x+b$, $a \neq 0$

Domínio: $D_f = \mathbf{R}$

Conjunto Imagem: $Im_f = \mathbf{R}$

a e **b** são números reais chamados, respectivamente, de *coeficiente angular* e *coeficiente linear*.

Gráfico

O gráfico de uma função de 1°. Grau é uma reta não paralela a nenhum eixo do plano cartesiano.

Exemplo

Na função $f(x) = 2x + 1$, obtenha:

a) os coeficientes angular e linear;

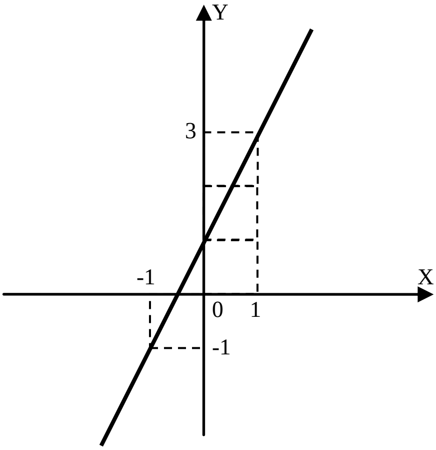
b) os valores de f(0), f(1), f(-1) e f(2).

c) o gráfico de f(x)

Respostas

a) Coeficiente angular: a =2

Coeficiente linear: b = 1



b) $f(0) = 2.0 + 1 = 1$

$f(1) = 2.1 + 1 = 3$

$f(-1) = 2.(-1) + 1 = -1$

$f(2) = 2.2 + 1 = 5$

c) Para construir o gráfico basta tomar dois pontos que pertençam à função.

E x e r c í c i o s - 2.6

1) Seja f uma função de A = {-1, 0, 1} em B = {-1, 0, 1, 2, 3} definida por f(x) = x + 1.

Pede-se:

a) o domínio de f;

b) o contradomínio de f;

c) o conjunto imagem de f.

2) Seja f uma função de A = {0, 1, 3} em B = {-2, -1, 1, 3, 5, 7} definida por f(x) = 2x - 1.

Pede-se:

a) o domínio de f;

b) o contradomínio de f;

c) o conjunto imagem de f.

3) Seja f uma função de A = {-1, 0, 1, 2} em B = {0, 1, 2, 3, 4} definida por $f(x) = x^2$.

Pede-se:

a) o domínio de f;

b) o contradomínio de f;

c) o conjunto imagem de f.

4) Seja f uma função definida por $f(x) = 3x - 1$, calcule:

a) $f(0)$

b) $f(2)$

c) $f(-3)$

d) $f(1/2)$

e) $f(-2/3)$

5) Seja f uma função definida por $f(x) = 2x^2 + x - 1$, calcule:

a) $f(2)$

b) $f(-2)$

c) $f(-1/2)$

d) $f(0)$

e) $f(2/3)$

6) Seja a função $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f = 2x + 3$. Determine x para que $f(x) = 11$.

7) Seja a função $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f = 2x^2 + 3$. Determine x para que $f(x) = 21$.

8) Determinar o domínio das seguintes funções:

a) $y = x - 5$

b) $y = 3x^2 + 3x + 5$

c) $y = \frac{1}{x-1}$

d) $y = \sqrt{x+2}$

e) $y = \frac{3}{\sqrt{x+2}}$

f) $y = \frac{x+1}{2x-3}$

2.7. Função de 2°. Grau

Função de 2°. Grau ou quadrática é toda função que associa a cada número real ***x***, o número real **a**.x^2 + **b**.x + c (a ≠ 0).

Em símbolos: f: **R** -> **R** | f(x) = **a**.x^2 + **b**.x + c (a ≠ 0)

Domínio: D_f = **R**

Conjunto Imagem: Im_f = **R**

a, **b** e **c** são números reais chamados **coeficientes**.

Gráfico

O gráfico de uma função de 2°. Grau é uma **parábola** com eixo de simetria paralelo ao eixo dos y.

- Se **a** > 0 a parábola tem concavidade voltada para cima;
- Se **a** < 0 a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Para construir o gráfico de f(x) = $ax^2 + bx + c$ (a ≠ 0), devemos proceder da seguinte maneira:

- Pelo sinal de **a**, verificamos a concavidade;
- Obter a intersecção da parábola com o eixo dos x, isto é, f(x) = 0 $\Leftrightarrow$ $ax^2 + bx + c = 0$.

Isto significa resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$;

<u>Fórmula resolutiva:</u> $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\therefore$ $\Delta = b^2 - 4.a.c$

De acordo com o valor de Δ (descriminante), temos as possibilidades:

♣ $\Delta > 0 \Rightarrow$ existem duas raízes reais e distintas ($x_1 \neq x_2$);

→ Isto significa que a parábola intercepta o eixo dos x em dois pontos.

♣ $\Delta = 0 \Rightarrow$ existem duas raízes reais e iguais ($x_1 = x_2$);

→ Isto significa que a parábola intercepta o eixo dos x em um ponto.

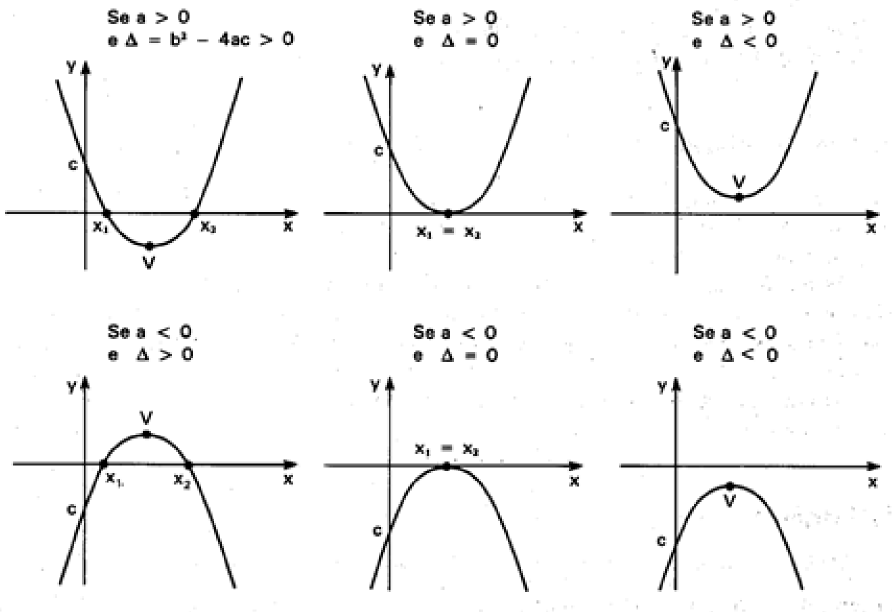
♣ $\Delta < 0 \Rightarrow$ não existem raízes reais.

→ Isto significa que a parábola não intercepta o eixo dos x.

- Obter as coordenadas do vértice da parábola: $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$

- Obter a intersecção da parábola com o eixo dos y, isto é, f(0) = c.

<u>Síntese</u>



Exemplo

Esboçar o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Primeiro passo:

Encontre a intersecção do gráfico com o eixo 0y, fazendo x = 0, então; $f(0) = 0^2 - 2.0 - 3 = -3$.

Logo: A(0,-3).

Segundo passo:

Encontre a intersecção do gráfico com o eixo 0x, fazendo f(x) = 0.

Tomando $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolvendo a equação acima encontramos: $x_1 = -1$ ou $x_2 = 3$.

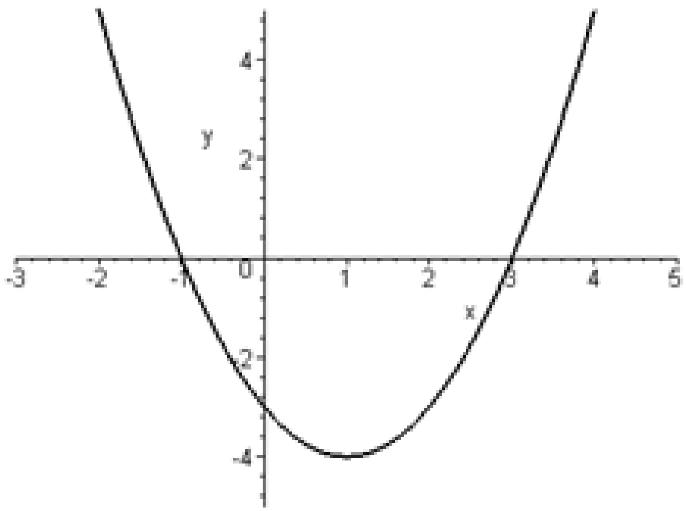
Logo: B(-1;0) e C(3;0).

Terceiro passo:

Encontrar as coordenadas do vértice da parábola.

$$x_V = \frac{-(-2)}{2.1} = 1$$

$$y_V = \frac{-((-2)^2 - 4.1.(-3))}{4.1} = -4 \qquad \therefore\ V(1;-4)$$



Exercícios – 2.7

1) Construa o gráfico das funções abaixo:

a) f(x) = 3

b) f(x) = - 5

c) $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geq 1 \\ -2, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ se } x < -2 \\ 1, \text{ se } -2 \leq x \leq 1 \\ -2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ -1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

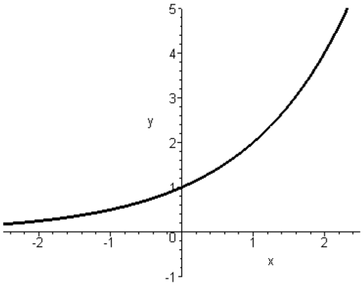
2.8. Função de Exponencial

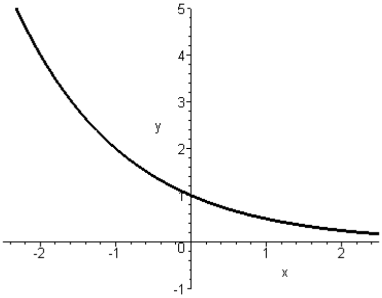
Chama-se função exponencial a toda função f: **R** -> $\mathbf{R}^*_+$ do tipo $f(x) = a^x$ com **a** > 0 e **a** ≠ 1.

- Se 0 < **a** < 1 → função decrescente.
- Se **a** > 1 → função crescente.

<u>Gráfico</u>

a > 1 **0 < a < 1**





Exercícios – 2.8

1) Quais dos seguintes pontos pertencem à reta $3x + y - 1 = 0$.

a) (0, 1)

b) (-1, 2)

c) (1, -2)

d) (0, 0)

2) Construa os gráficos das funções abaixo, classifique em crescente ou decrescente e faça um estudo de seu sinal:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = 3x - 2$

c) $y = -x + 3$

d) $y = -5x - 1$

e) $y = x$

3) Determine a equação da reta que passa pelos pontos:

f) (3, 4) e (-5, 2)

g) (0, 1) e (2, 0)

h) (1, 1) e (-2, 2)

i) (0, 0) e (-2, -3)

4) Encontre o coeficiente angular das retas que possuem os pontos:

a) (1, 2) e (2, 4)

b) (0, 0) e (1, 3)

c) (2, 3) e (1, 1)

d) (0, 1) e (5, 6)

5) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto P e também coeficiente angular <u>m</u>.

a) P(1, 2) e m = 1

b) P(-2, 3) e m = -2

c) P(0, 1) e $m = -\frac{1}{2}$

d) P(-2, -3) e m = 2

6) Encontre o coeficiente angular das seguintes retas:

a) $x + y - 1 = 0$

b) $x - y + 3 = 0$

c) $2x - 3y - 5 = 0$

d) $5x - 4y = 0$

7) O que há de semelhante entre equações de retas paralelas?

8) Encontre a equação da reta que tem o ponto (1, 2) e é paralela a reta $-2x + y - 1 = 0$.

9) Encontre a equação da reta que tem o ponto (-1, -3) e é paralela a reta $-x + 2y - 4 = 0$.

10) Esboce os gráficos das funções abaixo:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{se } x \geq 0 \\ -3x, \text{se} < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{se } x \geq 1 \\ -2x + 2, \text{se } x < 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3, \text{se } x < -2 \\ x, \text{se} -2 \leq x \leq 3 \\ -x - 1, \text{se } x > 3 \end{cases}$

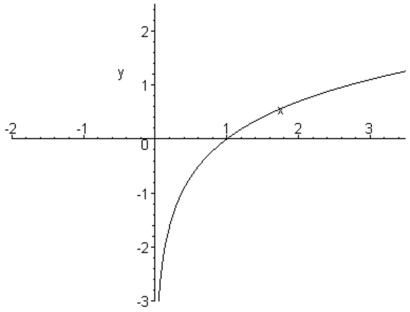
2.9. Função de Logarítmica

Chama-se função logarítmica a toda função f: **R*** -> **R** do tipo $f(x) = \log_b x$ (b > 0 e b ≠ 1).

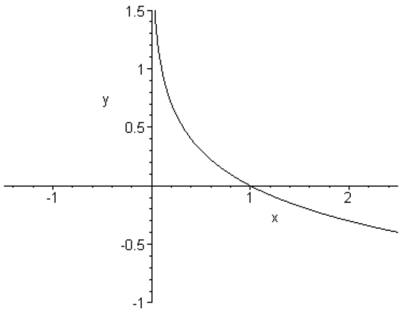
- Se 0 < **b** < 1 → função decrescente.
- Se **b > 1** → função crescente.

<u>Gráfico</u>

b > 1



0 < **b** < 1



E x e r c í c i o s – 2.9

1) Construa o gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = -7x^2$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = x^2 - 1$

e) $f(x) = x^2 – 2x - 3$

f) $f(x) = x^2 – 4x + 4$

g) $f(x) = -x^2 + 3x + 10$

h) $f(x) = x^2 +2x + 2$

i) $f(x) = x^2 –2x$

j) $f(x) = x^2 – 9$

k) $f(x) = - x^2 + 49$

l) $f(x) = x^2 – 2x + 2$

m) $f(x) = x^2 – 2x – 3$

n) $f(x) = - x^2 + 5x – 3$

o) $f(x) = x^2 – 2x + 1$

p) $f(x) = - x^2 + 4x$

q) $f(x) = -2x^2 – 2x – 1$

E x e r c í c i o s – 2.10

1) Esboce o gráfico das funções abaixo e as classifique em crescente ou decrescente:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $f(x) = 2^{1-x}$

d) $f(x) = \frac{3}{8}.4^x$

2) Resolva as equações:

a) $3^x = 81$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$

c) $3^{2x-1} = \frac{1}{3}$

d) $6^{x^2-2x+1} = 1$

E x e r c í c i o s – 2.11

1) Esboce o gráfico das funções abaixo e as classifique em crescente ou decrescente:

a) $f(x) = \log_3(x)$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

c) $f(x) = \log_2(x+1)$

d) $f(x) = \log_3(x-1)$

2) Resolva as equações:

a) $\log_3 (2x + 7) = 1$ b) $\log_2 (x^2 - 1) = 3$

c) $\log (3x^2 - 2x) = 0$ d) $\log_{1/2} (x) = 8$

Capítulo 3

Limites

3.1. Explorando a ideia de limite

A ideia fundamental de *limite* é saber como uma função f(x) se comporta quando os valores x se aproximam de um determinado valor x_0.

Vejamos um exemplo

Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, definida em **R** – {3}.

Pergunta-se; qual o valor de f(x) quando x se aproxima de 2?

Em símbolos

$\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}\right) =$?, isto é, qual o limite de f(x) quando x aproxima-se de 2?

Devemos observar que podemos nos aproximar de 2 tanto pela sua esquerda, valores menores que 2, quanto pela sua direita, valores maiores que 2, e que essa aproximação pode ser feita através incrementos tão pequenos quanto quisermos e um numero ilimitado de vezes.

Vejamos

Para valores a esquerda de 2;

x = 1,9	→	f(1,9) = 4,9
x = 1,99	→	f(1,99) = 4,99
x = 1,999	→	f(1,999) = 4,999
x = 1,9999	→	f(1,9999) = 4,9999

Observe, à medida que nos aproximamos de 2 pela esquerda, os valores de f(x) aproximam-se cada vez mais de 5, então podemos escrever que:

- $\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = 5$, ou seja: o limite de f(x) quando x aproxima-se de 2, pela esquerda (observe a notação; 2^-), é 5.

Agora para valores a direita de 2

$x = 2{,}1 \quad \rightarrow \quad f(2{,}1) = 5{,}1$

$x = 2{,}01 \quad \rightarrow \quad f(2{,}01) = 5{,}01$

$x = 2{,}001 \quad \rightarrow \quad f(2{,}001) = 5{,}001$

$x = 2{,}0001 \quad \rightarrow \quad f(2{,}0001) = 5{,}0001$

Observe, a medida que nos aproximamos de 2 pela direita, os valores de f(x) aproximam-se cada vez mais de 5, então podemos escrever que:

- $\lim_{x \to 2^+} \left(\dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = 5$, ou seja: o limite de f(x) quando x aproxima-se de 2, pela direita (observe a notação; 2^+), é 5.

Do que foi visto podemos concluir que; quando os valores de x se aproximam de 2, tanto pela esquerda quanto pela direita, f(x) aproxima-se de 5, isto é; o limite de f(x) quando x aproxima-se de 2 é 5.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right) = 5$$

Outro modo de se encontrar esse limite, uma vez que f(x) está definida em x = 2, é simplesmente substituir o valor de x na função.

Veja

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)=\frac{2^2-9}{2-3}=\frac{-5}{-1}=5$$

(isto só foi possível porque f(x) existe em x = 2)

Vejamos agora outra pergunta:

Qual o valor de f(x) quando x se aproxima de 3?

Aqui temos um "problema", pois a função não está definida em x = 3, logo não podemos fazer a substituição do valor de x na função, mas vamos observar o comportamento de f(x) quando os valores de x se aproximam de 3 tanto pela esquerda quando pela direita.

Para valores a esquerda de 3;

x = 2,9	→	f(2,9) = 5,9
x = 2,99	→	f(2,99) = 5,99
x = 2,999	→	f(2,999) = 5,999
x = 2,9999	→	f(2,9999) = 5,9999

Observe que apesar de f(x) não está definida em x = 3, quando aproximamos os valores de x para 3, pela esquerda, a função aproxima-se de 6, isto é;

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)=6$$

Agora para valores a direita de 3

x = 3,1	→	f(3,1) =6,1
x = 3,01	→	f(3,01) =6,01
x = 3,001	→	f(3,001) =6,001
x = 3,0001	→	f(3,0001) =6,0001

Novamente observamos que apesar de f(x) não está definida em x = 3, quando aproximamos os valores de x para 3, pela direita, a função aproxima-se de 6, isto é;

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)=6$$

Do que foi visto podemos concluir que; quando os valores de x se aproximam de 3, tanto pela esquerda quanto pela direita, f(x) aproxima-se de 6, isto é; o limite de f(x) quando x aproxima-se de 3 é 6.

$$\lim_{x \to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)=6$$

Através desses exemplos podemos observar a importância do *limite* de uma função em determinado ponto, principalmente se a função não está definida nesse ponto, mas necessitamos conhecer seu comportamento neste ponto.

O que procuraremos fazer a partir de agora é desenvolver técnicas que permita-nos calcular o limite de uma função em um ponto no qual ela não esteja definida sem a utilização de cálculo por aproximações de valores para x.

Uma técnica bastante utilizada é a simplificação da expressão a fim de encontrarmos outra expressão equivalente.

Observe que: $\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$

Logo

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

Como vemos a simplificação nos conduziu ao mesmo resultado anterior.

Definição Informal

Dada uma função f(x), definida num intervalo D, dizemos que o *limite* de f(x), quando x tende a x_0, é L, se o limite de f(x), quando x tende a x_0 pela esquerda de x_0, é L, e o limite de f(x), quando x tende a x_0 pela direita, é L.

Em símbolos

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L\\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

- Os limites a esquerda e a direita são chamados **limites laterais**
- Se os limites laterais são diferentes, dizemos que f(x) não tem limite naquele ponto.

E x e r c í c i o s – 3.1

1) Calcule os limites abaixo.

a) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + x)$

b) $\lim\limits_{x \to 10}(2^x + x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to 0}(\frac{2x+1}{2x^2 + x + 2})$

d) $\lim\limits_{x \to 0}\sqrt{4x^2 + 2x + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + x)$

f) $\lim\limits_{x \to 1}\sqrt{\frac{x-1}{x^2 - 1}}$

g) $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + 2x)$

h) $\lim\limits_{x \to 5} x^2(x+1)$

i) $\lim\limits_{x \to 0}(\frac{2x+1}{2x-1})$

j) $\lim\limits_{x \to -1}(x^2 + 1)(2x^2 - x - 1)$

k) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x-2}{x^2 - 4}$

l) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x-3}{x^2-1}$

m) $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1})$

n) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2+x}{4x}}$

o) $\lim\limits_{x\to 2}(2^x+2^{-x}-1)$

p) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+x+3}$

q) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-2}{4-4}$

r) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-1}$

s) $\lim\limits_{x\to \frac{-1}{2}}\left(2x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

t) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-2x}}$

3.2. Algumas Propriedades Fundamentais dos Limites

Existem algumas propriedades que nos ajuda a determinar o limite, de uma função, próximo de um determinado ponto. Sem ter a preocupação de deduzi-las ou demonstrá-las através de um rigor matemático elas serão apenas citadas e exemplificadas.

- **O limite de uma constante é a própria constante**

Exemplo: $\lim_{x \to 2}(5) = 5$

- **O limite de uma soma é igual a soma dos limites**

Exemplo: $\lim_{x \to 3}(2 + x) = \lim_{x \to 3}(2) + \lim_{x \to 3}(x) = 2 + 3 = 5$

- **O limite do produto é igual ao produto do limite**

Exemplo: $\lim_{x \to -2}(3x) = \lim_{x \to -2} 3 \cdot \lim_{x \to -2} x = 3 \cdot (-2) = -6$

- **O limite do quociente é igual ao quociente dos limites**

Exemplo: $\lim_{x \to 5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\lim_{x \to 5}(x-1)}{\lim_{x \to 5}(x+1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

- **O limite de uma potência é igual à potência do limite**

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}=\sqrt{4}=2$

- **O limite da função logarítmica é igual ao logaritmo do limite**

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 16}(\log_2 x)=\log_2(\lim\limits_{x\to 16} x)=\log_2 16=4$

- **O limite da função exponencial é igual à uma potência cujo expoente é o limite**

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 2}(2^{x+1})=2^{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)}=2^3=8$

Exercícios - 3.2

1) Determine os limites abaixo, quando existirem.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{x+2}$

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^3}$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3}$

g) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x^2+x}$

h) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{x-2}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x^4}$

3.3. Limites Infinitos

Seja f uma função definida por $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, para todo x real e diferente de 1.

Esta função não está definida em x = 1, uma vez que teríamos uma expressão do tipo $\dfrac{1}{0}$.

O que ocorre com f quando x tende a 1^+ (pela direita)? e a 1^- (pela esquerda)?

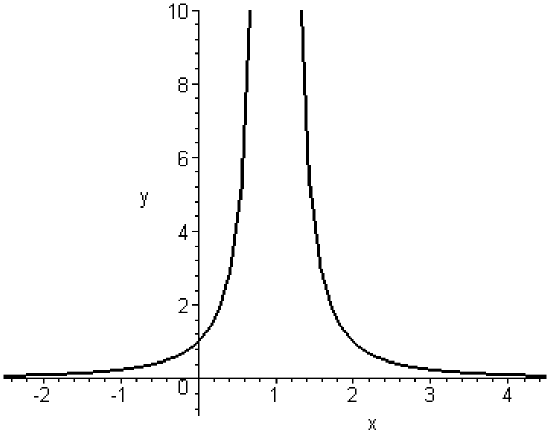
Vejamos a tabela abaixo

	$x \to 1^-$					$x \to 1^+$			
x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
f(x)	100	10000	1000000	100000000		100000000	1000000	10000	100

Notemos que à medida que os valores de x se aproximam de 1 – tanto pela direita quanto pela esquerda – os valores de f(x) crescem ilimitadamente, matematicamente podemos dizer que;

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Vejamos tal situação através de um gráfico



Definição:

"Se, quando x tende a x_0 e os valores de f(x) crescem negativamente acima de qualquer valor dizemos, então, que f(x) decresce infinitamente ou que existe o limite infinito de f(x)."

Em símbolos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

E x e r c í c i o s – 3.3

1) Calcule os seguintes limites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^4$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} -5x^2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x+7}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2+3x-5}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^4+x^2+4}{-x^2-2x+7}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{3x^3+1}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x+4}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2+2}$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} 10^{-x}$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}$

3.4. Limites no Infinito

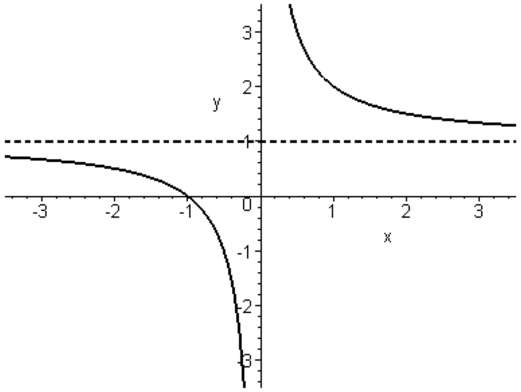
Em Matemática usamos os símbolos:

- $+\infty$ para indicar quantidades infinitamente positivas, e lemos *mais infinito.*
- $-\infty$ para indicar quantidades infinitamente negativas, e lemos *menos infinito.*

Vamos estudar o comportamento de algumas funções quando *x* tende a $+\infty$ ou quando tende para $-\infty$.

Considere a função f definida por $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, definida em $\mathbf{R} - \{0\}$.

Um esboço do gráfico de f é mostrado abaixo:



Observemos a tabela abaixo:

	$-\infty \leftarrow x$					$x \rightarrow +\infty$				
x	-10000	-1000	-100	-10	-1	1	10	100	1000	10000
f(x)	0,9999	0,999	0,99	0,9	0	2	1,1	1,01	1,001	1,0001

Percebemos, pelo gráfico e pela tabela acima, que a medida que x cresce ilimitadamente através de valores positivos ou negativos, os valores de f(x) aproximam-se de 1.

Assim, podemos escrever:

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}=1$$

Exemplo

Calcular o limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{5x-2}$

Resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{5x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(5-\frac{2}{x}\right)} =$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\left(5-\frac{2}{x}\right)} = \frac{2}{5}$$

Limite Exponencial Fundamental – o número *e*

Seja f uma função definida como $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Consideremos para *x* valores que tornem $1 + \frac{1}{x} > 0$, isto é, ou x < -1 ou x > 0.

Vamos analisar o comportamento de f(x) quando *x* tende a - ∞.

x	f(x)
-10	2,867971991
-100	2,731999026
-1000	2,719642216
-10000	2,718417755
-100000	2,71829542
-1000000	2,718283188

Observamos que:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2{,}718...$$

Vamos agora analisar o comportamento de f(x) quando x tende a + ∞.

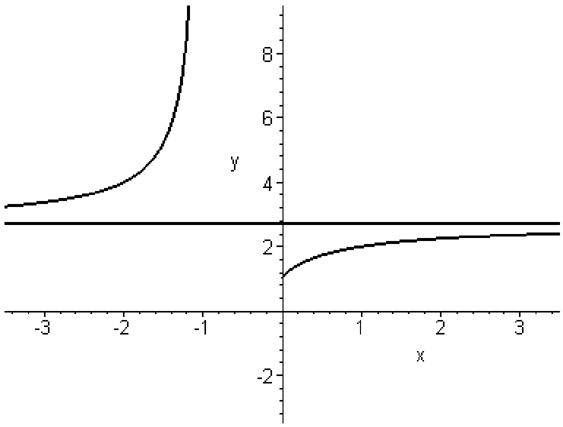
x	f(x)
10	2,59374246
100	2,704813829
1000	2,716923932
10000	2,718145927
10000	2,718145927
100000	2,718268237

Observamos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2{,}718...$$

Esse número conhecido como **número de Euler** é representado pela letra *e*, isto é *e* = 2,718..., que é a base do *logaritmo natural* ou *neperiano*. O número *e* é de suma importância no estudo de inúmeros fenômenos naturais, sem falar que sua origem está ligada ao cálculo de juros compostos, logo é de fundamental importância no estudo da Economia.

O gráfico de f(x) baseado nas considerações adotadas acima está representado a seguir



Exercícios – 3.4

1) Calcular os limites abaixo

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-3x}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{-x}{3}}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3-x}$

3.5. Funções Contínuas

Uma das aplicações do *limite* é no estudo da continuidade do gráfico de uma função, através do *limite* podemos detectar se o gráfico de determinada função é uma linha contínua ou se apresenta *"saltos"* ou *"furos"*.

Uma função f(x) é contínua num ponto em x = a de seu domínio se forem satisfeitas as seguintes condições:

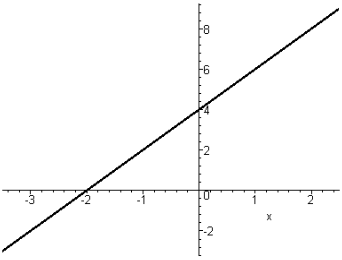
- existir f(a), ou seja f(x) está definida em x = a;
- existir $\lim\limits_{x \to a} (a)$, ou seja os limites laterais forem iguais;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

✍ *Caso alguma dessas condições não for satisfeitas, então a função é dita* ***descontínua***.

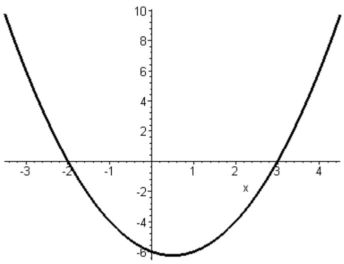
Gráficos

a) Funções contínuas

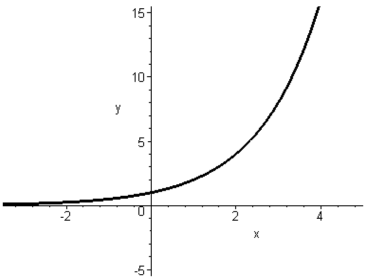
i) $f(x) = 2x + 3$



ii) $f(x) = x^2 - x - 6$

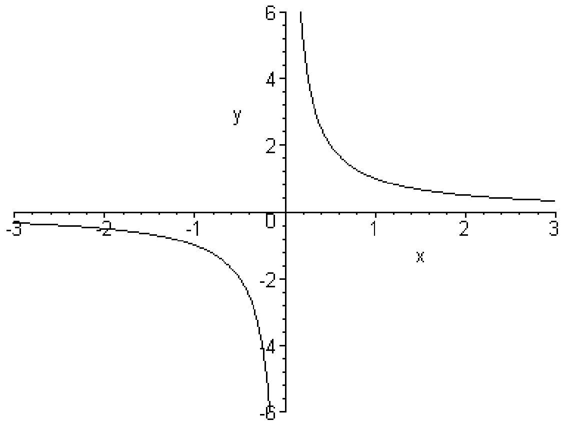


iii) $f(x) = 2^x$

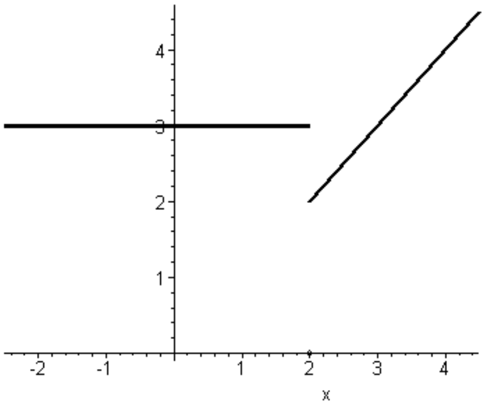


b) Funções Descontínuas

i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, descontínua em x = 0.



ii) $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ se } x < 2 \\ x, \text{ se } x > 2 \end{cases}$, descontínua em x = 2.



Exercícios – 3.5

1) Nos exercícios abaixo, determine se a função possui ponto de descontinuidade.

a) $f(x) = x + 7$

b) $f(x) = -2x + 5$

c) $f(x) = x^2 + x$

d) $f(x) = x^2 - 4$

e) $f(x) = 5^x$

f) $f(x) = (0,5)^x$

g) $f(x) = \frac{3}{x+5}$

h) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$

i) $f(x) = \frac{8}{x^2-4x+4}$

j) $f(x) = \frac{x+2}{3x^2-12}$

k) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$

2) Verifique se a função f(x) é contínua para o valor de x indicado.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{5x^2 - x + 2}$ para x = 0

b) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$, para x = 1

c) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 9}$, para x = -3

d) $f(x) = \sqrt{x - 3}$, para x = 2

Capítulo 4

Derivadas

4.1. Taxa média de variação

Para ter uma melhor compreensão do significado do que é uma *taxa média de variação* observe o exemplo a seguir.

Exemplo

Uma indústria produz dois tipos de objetos dos tipos do tipo A e outro do tipo B. O custo de produção objeto tipo A obedece à seguinte função; $f(x) = 10 + 2x$ e do tipo B $g(x) = x^2$, sendo x o número de unidades produzidas.

Denominamos *Custo Médio* a razão entre a variação do custo de produção entre duas quantidades e o número de unidades produzidas, isto é;

$$CM = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Baseando-se no enunciado acima responda:

a) Qual o custo médio de cada produto quando são produzidos de 1 a 11 objetos?

b) Qual o custo médio de cada produto quando são produzidos de 11 a 21 objetos?

c) Qual o custo médio de cada produto quando são produzidos de 21 a 31 objetos?

Respostas

a)

$$tipo\ A \rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 12 \\ x = 11 \Rightarrow f(11) = 32 \end{cases} \Rightarrow CM = \frac{32-12}{11-1} = 2$$

$$tipo\ B \rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \\ x = 11 \Rightarrow f(11) = 121 \end{cases} \Rightarrow CM = \frac{121-1}{11-1} = 12$$

b)

$$tipo\ A \rightarrow \begin{cases} x = 11 \Rightarrow f(11) = 32 \\ x = 21 \Rightarrow f(21) = 52 \end{cases} \Rightarrow CM = \frac{52-32}{21-11} = 2$$

$$tipo\ B \rightarrow \begin{cases} x = 11 \Rightarrow f(11) = 112 \\ x = 21 \Rightarrow f(21) = 441 \end{cases} \Rightarrow CM = \frac{441-121}{21-11} = 32$$

c)

$$tipo\ A \rightarrow \begin{cases} x = 21 \Rightarrow f(21) = 52 \\ x = 31 \Rightarrow f(31) = 72 \end{cases} \Rightarrow CM = \frac{72 - 52}{31 - 21} = 2$$

$$tipo\ B \rightarrow \begin{cases} x = 21 \Rightarrow f(21) = 441 \\ x = 31 \Rightarrow f(31) = 961 \end{cases} \Rightarrow CM = \frac{961 - 441}{31 - 21} = 52$$

Do exemplo acima observamos que o produto Alfa apresenta sempre um mesmo valor para o *custo médio*; CM = 2, já o produto Beta não apresenta um mesmo valor para o *custo médio* nem uma uniformidade na variação de seus valores.

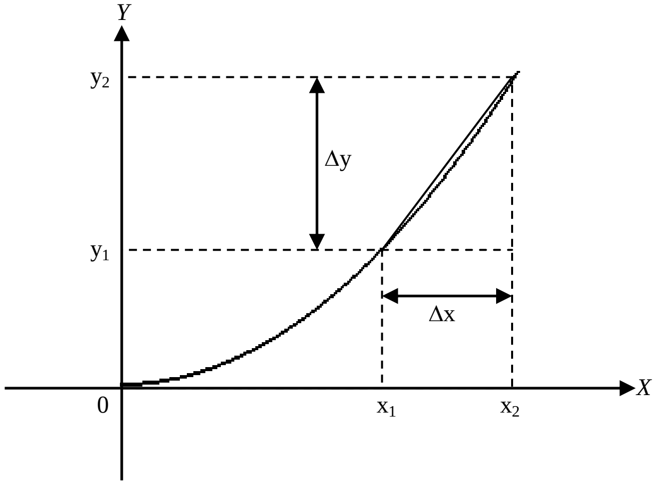
A fórmula (3.1f), que aplicamos no cálculo dos *custos médios*, independentes do tipo de função e das grandezas envolvidas, é denominada *Taxa Média de Variação*.

Definição

Seja y = f(x), chamamos *taxa média de variação* de *y* em relação a *x*, entre x_1 e x_2 à razão; ($x_1 \neq x_2$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Representação gráfica da taxa média de variação:



✍ A *taxa média de variação* representa a tangente do ângulo que a reta secante ($tg\theta$) à curva e que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

Exercícios – 4.1

1) Calcular o valor da taxa média de variação das funções entre os valores indicados.

a) $y = 3$, $x = -1$ e $x = 1$

b) $y = -5$, $x = 0$ e $x = 2$

c) $y = -2x + 4$, $x = 1$ e $x = 3$

d) $y = 7x + 10$, $x = -2$ e $x = 5$

e) $y = -3x^2 - 2x$, $x = 1$ e $x = 3$

f) $y = -2x^2 - 3$, $x = -2$ e $x = 2$

g) $y = (x - 2)^3$, $x = -2$ e $x = 0$

h) $y = 2^x$, $x = -2$ e $x = 0$

i) $y = 5^{-x}$, $x = 1$ e $x = -1$

j) $y = \log(x)$, $x = 1$ e $x = 10$

k) $y = \log(10x^2)$, $x = 1$ e $x = 10$

l) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$ e $x = 9$

m) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$ e $x = 5$

n) $y = \frac{x+1}{x}$, $x = 1$ e $x = 2$

o) $y = \frac{2x+1}{3x-1}$, $x = 1$ e $x = 3$

p) $y = x^3 + x^2$, $x = -1$ e $x = 1$

q) $y = \sqrt{x+1}$, $x = 0$ e $x = 3$

r) $y = \frac{1}{x+1}$, $x = 1$ e $x = 3$

4.2. Derivada de uma função

Seja y = f(x) uma função real, se existe e for finito o limite de $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quando *x* tende a x_0, ele é chamado *derivada* de f no ponto $x = x_0$, e representa-se por $f'(x_0)$ (lê-se: f linha de x_0), ou seja;

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Na definição de $f'(x_0)$, fazendo $x - x_0 = \Delta x$, portanto $x = x_0 + \Delta x$, notamos que quando $x \to x_0$, $\Delta x \to 0$.

Então podemos reescrever a expressão acima;

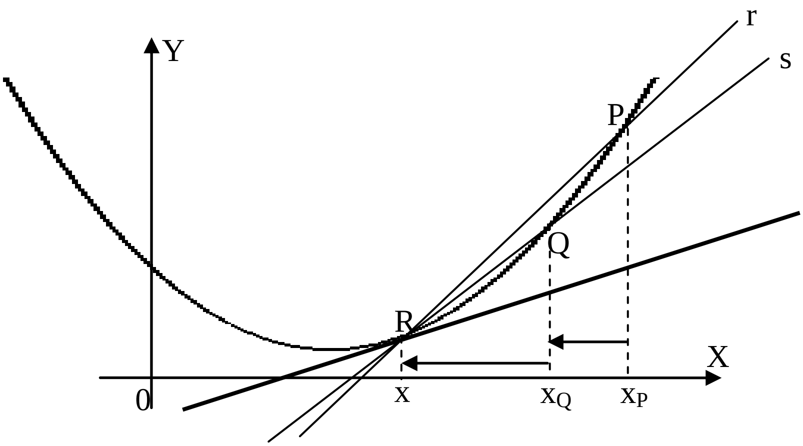
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

Se trocarmos x_0 por x, teremos uma função $f'(x)$ através da qual podemos calcular o valor de $f'(x)$ em qualquer ponto onde ela exista, tal função é denominada *função derivada*.

4.3. Interpretação geométrica da derivada

Como foi dito no item anterior a *taxa média de variação* está associada a uma reta secante a uma curva. Então podemos fazer a seguinte pergunta; geometricamente, a que está associada a ideia de derivada?

Comecemos observando o gráfico abaixo



Baseando-se no gráfico notamos que ao nos deslocarmos, sobre a curva, o ponto P para Q, a reta r, que é secante, assume a posição da reta s, que também é secante, se em seguida deslocarmos o ponto Q para um ponto infinitamente próximo de R, mas que não ocupem a mesma posição, a reta s passa a ocupar a posição da reta t, que é tangente à curva.

Em outras palavras, sendo $x_0 = x_Q + \Delta x$ ou $x_0 - x_Q = \Delta x$ se calcularmos o limite da taxa média de variação da função f(x) quando x_Q

tende para x_0, encontraremos a *taxa de variação instantânea* de y em relação a x, que corresponde à declividade da reta tangente ao gráfico da função f(x) no ponto $R(x_0, f(x_0))$, ou seja, $f'(x_0)$ é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto $R(x_0, f(x_0))$, cuja equação é dada por:

$$\boxed{y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)}$$

4.4. Regras de derivação

O cálculo da derivada de uma função a partir da definição é um processo longo e trabalhoso, tendo como meta o desenvolvimento das técnicas de derivação e suas aplicações, vamos apresentar, antecipadamente, algumas técnicas de derivação a fim de facilitar e agilizar o aprendizado. As demonstrações de como se obter tais fórmulas não serão apresentadas aqui, mas poderão, com muita facilidade, ser encontradas na maioria dos livros de Cálculo I.

- **Derivada de uma função constante**

  Considere a função constate $f(x) = c$, com $c \in \mathbf{R}$, temos: $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

  Exemplo

  $$f(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$$

E x e r c í c i o s - 4.2

1) Calcule as derivadas abaixo:

   a) $f(x) = -3$

   b) $g(x) = \sqrt{2}$

   c) $h(x) = 0,5$

- **Derivada de uma função potência**

Para uma função do tipo $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbf{N}^*$, temos: $f(x) = x^n \Rightarrow$

$f'(x) = n.x^{n-1}$

Exemplo

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

Exercícios – 4.3

1) Determine a derivada de:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \sqrt{x}$

- **Derivada da função exponencial**

Para a função $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbf{R}^*_+$ e $a \neq 1$, temos:

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x.\ln(a)$$

Exemplo

$$f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x.\ln(2)$$

♣ Temos um caso particular quando a base for *e*.

Vejamos um exemplo

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.\ln(e) = e^x$, uma vez que $\ln(e) = 1$.

Exercícios – 4.4

1) Determine a derivada de

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = 10^x$

c) $f(x) = e^x$

- **Derivada da função logarítmica**

Para a função $f(x) = \log_a(x)$, $x \in \mathbf{R}^*_+$ e $a \neq 1$, temos: $f(x) = \log_a(x)$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x.\ln(a)}$.

Exemplo

$$f(x) = \log_2(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x.\ln(2)}$$

♦ Temos um caso particular quando o logaritmo for natural.

Vejamos um exemplo

$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x.\ln(e)} = \dfrac{1}{x}$, uma vez que $\ln(e) = 1$.

Exercícios – 4.5

1) Calcule a derivada de

   a) $f(x) = \log_3(x)$

   b) $f(t) = \ln(t)$

   c) $g(t) = \log_5(t)$

4.5. Algumas propriedades da derivação

Se g(x) e h(x) funções deriváveis num ponto x, então são válidas as seguintes propriedades:

- **Derivada da soma**

  $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

  (a derivada da soma é igual a soma das derivadas)

  Exemplo

  $f(x) = x^2 + 5^x - \ln(x) \Rightarrow f'(x) = 2x + 5^x.\ln(5) - \frac{1}{x}$

- **Derivada do produto**

  $f(x) = u(x).v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

  Exemplo 1

  $f(x) = 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 0.x^3 + 5.3x^2 = 15x^2$

  - *Note que $f(x) = g(x).h(x)$, onde $g(x) = 5$ e $h(x) = x^3$, com $g'(x) = 0$ e $h'(x) = 3x^2$, logo;* $f'(x) = 15x^2$.

  Exemplo 2

  $f(x) = 2x^3.\ln(x) \Rightarrow$

  $$f'(x) = 6x^2.\ln(x) + 2x^3.\frac{1}{x} = 6x^2.in(x) + 2x^2$$

- **Derivada do quociente**

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}, \ v(x) \neq 0.$$

Exemplo

$$f(x) = \frac{x^2+1}{3x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x.3x - (x^2+1).3}{(3x)^2} = \frac{6x^2 - 3x^2 - 3}{9x^2} = \frac{3x^2-3}{9x^2} = \frac{x^2-1}{3x^2}$$

- **Derivada de uma função composta**

Seja h uma função derivável em *x* e seja g uma função derivável em *y*, tal que y = h(x), então podemos afirmar que:

$f(x) = g(y) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(y).h'(x)$

Exemplo 1

$f(x) = (2x + 1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(2x + 1)^2.2 = 6.(2x + 1)^2$

Exemplo 2

$f(x) = 2^{(3x + 1)} \Rightarrow f'(x) = 2^{(3x + 1)} \ln(2) . 3$

- **Derivada da função inversa**

Vamos considerar uma função *f*, *inversível*, definida num intervalo aberto D. Se *f* é derivável em D, então sua inversa f^{-1} também é derivável em D e temos que:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(x)}$$

(a derivada da inversa de f é igual ao inverso da derivada de f.)

Exemplo

Determinar a derivada da inversa de $f(x) = 3x^2 + 5$.

Como $f'(x) = 6x \Rightarrow (f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{6x}$

Exercícios – 4.6

Calcule a derivada de:

1) $y = 10$

2) $y = \sqrt{2}$

3) $y = x$

4) $y = -3x$

5) $y = 2x + 1$

6) $y = -x + 7$

7) $y = \dfrac{x}{2} - 5$

8) $y = \dfrac{3x}{5}$

9) $y = \dfrac{x+1}{2}$

10) $y = 7x + 10$

11) $y = \dfrac{1}{x}$

12) $y = x^3$

13) $y = 2x^4$

14) $y = 3x^2 + 5x$

15) $y = -x^2 + x + 1$

16) $y = x^5 + 3$

17) $y = -9x^3 + 7x^2 + 2x$

18) $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 7$

19) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$

20) $y = \sqrt{x}$

21) $y = \sqrt[3]{x}$

22) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

23) $y = e^x$

24) $y = x^2 + e^x$

25) $y = e^x + x + 1$

26) $y = e^{2x}$

27) $y = e^{-3x}$

28) $y = e^{3x} + x^3$

29) $y = 5.e^x$

30) $y = 5^x$

31) $y = 7^x$

32) $y = x^2 + 2^x + 2$

33) $y = \ln x$

34) $y = \ln (2x)$

35) $y = \ln (x^2)$

36) $y = \log_2 x$

37) $y = \log_2 (x^2)$

38) $y = \log_3 (2x^3)$

39) $y = e^x + \ln x$

40) $y = x^2 - e^x + \ln x + \log_3 x$

41) $y = 2xe^x$

42) $y = x^2 e^x$

43) $y = 5^x \ln x^2$

44) $y = x . \ln x$

45) $y = e^x \ln x$

46) $y = (2x + 1)(x^2 + 3)$

47) $y = 2x(e^x + \ln x)$

48) $y = (x + 4)(x - 2)$

49) $(x^3 - 3)(2x^2 + 1)$

50) $y = x^3(2x^2 - 3x)$

51) $y = (x + 1)(x - 2)(1 - x)$

52) $y = \frac{1}{x^2}$

53) $y = \frac{1}{x+1}$

54) $y = \frac{x+1}{x-1}$

55) $y = \frac{2x}{x^2+2}$

56) $y = (x^2 - 1)^3$

57) $y = (x^4 + 1)^2$

58) $y = \sqrt{x+1}$

59) $y = \sqrt{x^2+x}$

60) $y = 2^{x^3}$

61) $y = (\log_5 x)^2$

62) $y = (\ln x)^3$

63) $y = (\ln x^2)^2$

64) $y = \ln(\sqrt[3]{x^2})$

65) $y = \ln(x^2 + 5x + 2)$

66) $y = 2^{x^2+2x-3}$

67) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

68) $y = \dfrac{x}{e^x}$

69) $y = (\log x)^2$

70) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto de abscissa $x = 3$.

71) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = x^3$ no ponto de abscissa $x = 1$.

72) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + x - 1$ no ponto de abscissa $x = 2$.

73) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ no ponto de abscissa $x = 4$.

74) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{1}{x}$ no ponto de abscissa $x = -1$.

75) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = e^x$ no ponto de abscissa $x = 0$.

76) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = \ln(x^2)$ no ponto de abscissa $x = e$.

77) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = x^2 + 1$ no ponto de abscissa $x = -2$.

78) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = 3x^3 + 2x^2 + x$ no ponto de abscissa $x = -1$.

79) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x+1}$ no ponto de abscissa $x = 3$.

80) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = e^{x^2}$ no ponto de abscissa $x = 2$.

81) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = \left(\frac{1}{x}\right)^2$ no ponto de abscissa $x = -1$.

82) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = \frac{x^2}{3}$ no ponto de abscissa $x = -3$.

83) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = \frac{1}{x+1}$ no ponto de abscissa $x = 3$.

4.6 Derivadas Sucessivas

Seja f(x) uma função contínua em um intervalo aberto D, e seja D_1 o conjunto dos pontos de D em que f(x) é derivável. Em D_1 já definimos a função $f'(x)$, chamada *derivada de f(x)* ou *derivada primeira de f(x)*. Seja, agora D_2 o conjunto dos pontos de D_1 em que $f'(x)$ é derivável. Definimos, então, em D_2, a função derivada de $f'(x)$ que chamamos de *derivada segunda de f(x)* e representaremos por $f''(x)$. Podemos prosseguir de modo análogo, e teremos, então, a derivada terceira, quarta, quinta, etc de *f(s)*.

Exemplo

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$

$f''(x) = 6x + 4$

$f'''(x) = 6$

$f^{(4)}(x) = 0$, a partir da quarta derivada todas serão nulas.

4.7. Estudo da variação de uma função – Pontos de máximo e mínimo

As derivadas de uma função fornecem informações importantes sobre o comportamento de tal função no que se refere ao seu *crescimento* ou *decrescimento* e aos valores extremos que ela atinge, tais como seus pontos de máximos ou de mínimos.

♦ **Crescimento e decrescimento de uma função**

Seja *f(x)* uma função definida num intervalo aberto D. Vamos recordar as definições da função crescente e decrescente num intervalo $D_1 \subset D$.

- *f(x)* é crescente em D $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in D \\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{cases}$
- *f(x)* é decrescente em D $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in D \\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$

Sabemos no entanto que o *coeficiente angular* da reta tangente ao gráfico de uma função *f(x)* no ponto $P(x_1,\ f(x_1))$ é dado pela derivada primeira de *f(x)* em x_1.

Do estudo da trigonometria, já sabemos que se o ângulo θ é agudo (θ < 90°) sua tangente é positiva (tgθ > 0) e se o ângulo θ é obtuso (θ > 0) então sua tangente é negativa (θ < 0).

Assim sendo:

- ♣ *Se uma função é crescente em D, então sua derivada primeira é positiva ou de um modo recíproco, se uma função f(x) é derivável em D e temos* $f'(x) > 0$, *para qualquer* $x \in D$*, então f(x) é crescente em D.*

$$\boxed{f'(x) > 0, \forall x \in D \Rightarrow f \text{ é crescente em D}}$$

- ♣ *Se uma função é decrescente em D, então sua derivada primeira é negativa ou de um modo recíproco, se uma função f(x) é derivável em D e temos* $f'(x) < 0$, *para qualquer* $x \in D$*, então f(x) é decrescente em D.*

$$\boxed{f'(x) < 0, \forall x \in D \Rightarrow f \text{ é decrescente em D}}$$

- ♦ **Ponto de Máximo local, Ponto de Mínimo local e Ponto de Inflexão**

Aplicação da Primeira Derivada

Suponha que uma função *f(x)* seja derivável num intervalo aberto D e que x_0 seja um ponto desse intervalo e que $f'(x_0) = 0$. Neste caso a reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto é paralela ao eixo ***x***, isto é, a reta tangente ao gráfico de *f(x)* tem coeficiente angular nulo, quando isso ocorre significa que x_0 é a abscissa de um ponto denominado *ponto crítico*, que pode ser classificado como:

- ♣ **Ponto de máximo local**

  Ocorre quando antes de x_0 a função é crescente e depois de x_0 é decrescente, isto é, se $f'(x) > 0$ antes de x_0 e $f'(x) < 0$ depois de x_0.

- ♣ **Ponto de mínimo local**

  Ocorre quando antes de x_0 a função é decrescente e depois de x_0 é crescente, isto é, se $f'(x) < 0$ antes de x_0 e $f'(x) > 0$ depois de x_0.

- ♣ **Ponto de inflexão**

  Ocorre quando antes e depois de x_0 a função é crescente, ou seja, $f'(x) > 0$, ou antes, e depois de x_0 é decrescente, ou seja, $f'(x) < 0$.

Um modo de detectarmos eventuais pontos críticos de uma função derivável é resolver a equação $f'(x) = 0$, *e depois verificar o sinal de* $f'(x)$ *antes e depois de cada valor encontrado como raiz da equação.*

Exemplo

Determinar os pontos críticos das funções:

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = x^3$

Resolução

a) $f(x) = x^3 - 3x$

A derivada de $f(x) = x^3 - 3x$ é $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Resolvendo a equação: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$, encontra-se: $x_1 = +1$ e $x_2 = -1$.

Como foram encontrados dois valores para os pontos críticos, devemos então analisar o sinal de $f'(x)$ nos intervalos; a esquerda de -1, entre -1 e +1 e a direita de +1.

Vejamos:

Para x = -2, temos: $f'(-2) = 9 > 0$

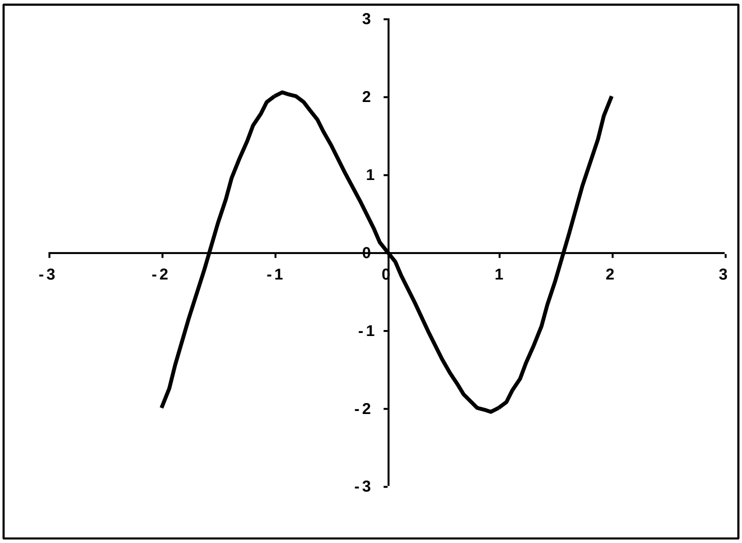
Para x = 0, temos: $f'(0) = -3 < 0$

Para x = 2, temos: $f'(2) = 9 > 0$

Logo

- Em x = -2, temos um ponto de **máximo**.
- Em x = 2, temos um ponto de **mínimo**.

Veja o gráfico de f(x)



b) $f(x) = x^3$

A derivada de $f(x) = x^3$ é $f'(x) = 3x^2$

Resolvendo a equação:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0$, encontra-se; $x_1 = x_2 = 0$.

Como foi encontrado apenas um valor para o ponto crítico, devemos então analisar o sinal de $f'(x)$ antes e depois de x = 0.

Para x = -1, temos: $f'(-1) = 3 > 0$

Para x = 1, temos: $f'(1) = 3 > 0$

Como tanto antes quanto depois de $x = 0$, $f'(x) > 0$, então o ponto que tem abscissa $x = 0$ é ponto de **inflexão**.

Aplicação da Segunda Derivada

Seja *f(x)* uma função definida num domínio D, e que existam $f'(x)$ e $f''(x)$ em D. Os sinais de $f''(x)$ estão relacionados à concavidade do gráfico de *f(x)* do seguinte modo:

Dizemos que o gráfico de f(x) tem concavidade voltada para cima, num intervalo $D_1 \subset D$, se $f''(x) > 0$ para todo $x \in D_1$.

Dizemos que o gráfico de f(x) tem concavidade voltada para baixo, num intervalo $D_1 \subset D$, se $f''(x) < 0$ para todo $x \in D_1$.

Se $f''(x) = 0$ em $x = x_0$ e $f''(x)$ muda de sinal, antes e depois de x_0, então x_0 é a abscissa de um ponto de inflexão, ou seja, ao passar por x_0, o gráfico de f(x) muda de concavidade.

Através da verificação do sinal de $f''(x)$ podemos também identificar se os pontos críticos são pontos de máximo, de mínimo ou de inflexão do gráfico de f(x), uma vez que esses pontos estão associados ao vértice da concavidade ou à mudança no sentido da concavidade.

Vamos considerar uma função *f(x)* contínua e derivável até segunda ordem num intervalo D_1, ou seja, que exista $f'(x)$ e $f''(x)$ em D_1, e que estas derivadas também sejam contínuas D_1. Se em $x_0 \in D_1$ houver um ponto crítico de *f(x)*, isto é, $f'(x_0) = 0$, então podemos afirmar que:

- Se $f''(x_0) < 0$, então $P(x_0, f(x_0))$ é ponto de **máximo local**.
- Se $f''(x_0) > 0$, então $P(x_0, f(x_0))$ é ponto de **mínimo local**.
- Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então $P(x_0, f(x_0))$ é de **inflexão**.

Exemplo

Encontre os pontos críticos da função

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$.

Resolução

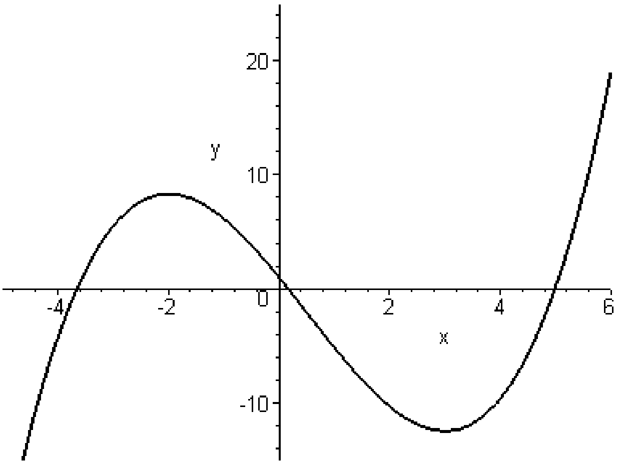
- Calcular $f'(x) \Rightarrow f'(x) = x^2 - x - 6$.
- Resolver a equação $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

- Soluções encontradas: x_1 = -2 e x_2 = 3.
- Aplicar o teste da primeira derivada:
    - $f'(-3) = 6 > 0$ (a esquerda de -2)
    - $f'(0) = -6 < 0$ (entre -2 e 3)
    - $f'(4) = 6 > 0$ (a direita de 3)

Conclusão:

- Em x = -2 há um ponto de máximo
- Em x = 3 há um ponto de mínimo.

Vejamos isto no gráfico de f(x).



Vamos agora aplicar a segunda derivada para que através dela identificar os pontos de máximo e de mínimo de *f(x)*.

Como vimos acima $f'(x) = x^2 - x - 6$, logo $f''(x) = 2x - 1$.

Calculando o valor da segunda derivada em x = -2 e em x = 3, teremos:

- $f''(-2) = -3 < 0$, logo em x = -2 temos um ponto de máximo.
- $f''(3) = 5 > 0$, logo em x = 3 temos um ponto de mínimo.

Podemos ainda fazer a seguinte pergunta:

Há ponto de inflexão no gráfico de f(x)?

Para que haja ponto de inflexão em f(x), deve existir x = a, tal que: $f''(a) = 0$.

Como $f''(x) = 2x - 1$, e aplicando a condição acima, temos: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Logo, em $x = \frac{1}{2}$, temos um ponto de inflexão, ou seja, uma inversão de concavidade.

Exercícios – 4.7

84) Calcule a derivada segunda de $f(x) = 2x + 3$.

85) Calcule a derivada terceira de $f(x) = 2x^3$.

86) Calcule a derivada segunda de $f(x) = x^2 + 1$.

87) Calcule a derivada terceira de $f(x) = \sqrt{x}$.

88) Calcule a derivada terceira de $f(x) = \ln x$.

89) Calcule a derivada quarta de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

90) Calcule a derivada segunda de $f(x) = 2^x$.

91) Calcule a derivada terceira de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

92) Calcule a derivada terceira de $f(x) = (\ln x)^2$.

93) Calcule a derivada quinta de $f(x) = e^x$.

Exercícios – 4.8

1) Calcular os pontos críticos das funções:

a) $f(x) = 2x^3 - 6x$

b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 7$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

d) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 10$

e) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$

f) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

g) $f(x) = 0{,}25x^4 - x + 3$

h) $f(x) = x^4 - 2x + 2$

i) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 4$

j) $f(x) = x^3 - 3x^2$

k) $f(x) = -x^3 + 6x + 1$

l) $f(x) = x^4 - 8x^3$

m) $f(x) = x^4 - 6x^2$

n) $f(x) = x^4 - 4x$

Problemas envolvendo máximos e mínimos

Neste item aplicaremos a teoria que estudamos na resolução de alguns problemas, cujas soluções exigem a aplicação do cálculo de valores máximos e mínimos de funções reais.

E x e r c í c i o s – 4.9

1) Qual é a área máxima que pode ter um retângulo de perímetro igual a 100 cm?

2) Um fabricante de refrigerante embala seu produto em latinhas cilíndricas de capacidade 785 ml. Qual o valor do raio da base dessas latinhas de modo que seja gasto o mínimo de material na sua confecção? (considere $\pi = 3,14$)

3) Um fabricante de embalagens deseja fazer caixas sem tampas de pedaços de papelão de 12 cm^2, cortando quadrados iguais em seus quatro cantos e dobrando os lados. Determine o comprimento do lado do quadrado que se deve cortar para que o volume da caixa seja máximo.

4) Determinar o raio da base de uma lata de cerveja cilíndrica de volume 600 ml de modo que o material gasto na confecção da lata seja mínimo.

5) Qual a área do maior retângulo que tem 200 cm de perímetro?

6) A função demanda de um determinado produto é dada pela expressão $D(p) = 20 + 8p - p^2$, onde p representa o preço de venda por unidade do produto. Qual deve ser o valor de p para que a procura seja máxima?

7) O custo total associado à produção de um determinado produto é dado por $CT(x) = x^2 - 6x + 11$, onde x representa cada 1.000 unidades produzidas. Calcule quantas unidades devem ser produzidas de modo que o custo total seja mínimo e o valor desse custo.

8) No exercício anterior calcule o valor do custo marginal ($C_{mg} = \frac{d(CT)}{dx}$) para 5.000 unid.

9) Uma empresa produz um tipo de caneta com um custo total descrito pela função $CT = x^3 - 2x^2 - 15x + 100$, onde x é a quantidade de caixas, com 50 de canetas, produzidas.

Baseando-se nessas informações, calcule:

a) a equação do custo médio (CT/x);
b) a equação do custo marginal;
c) o valor do custo marginal para a produção de 250 canetas;
d) a quantidade de canetas que corresponde ao custo mínimo.

10) A função receita total de uma fabrica de certo produto é dada por RT = q.P, onde q é quantidade de unidades produzidas e P o preço praticado. Sabendo-se que $q(P) = \frac{2.000}{e^{0,004.P}}$, determine:

a) a expressão da receita total em função de q;

b) a receita total máxima.

11) Um avicultor quer construir um galpão de 121 m^2 de área coberta, com tela de arame com 2,5m de altura. Se cada metro quadrado de tela de arame custa R$ 16,00, qual o custo mínimo possível da construção desse galpão?

12) A diretoria de um clube esportivo quer construir uma piscina em forma retangular de perímetro igual a 75 m e 2,0 m de profundidade. Se um metro cúbico de água custa R$ 0,50 qual será o custo máximo para encher a piscina do clube?

Capítulo 5

Noções de Cálculo Integral

5.1 . A Primitiva de uma função

Seja f(x) uma função real contínua em um intervalo **D**, definimos uma primitiva ou antiderivada de f(x) a função F(x), tal que $F'(x) = f(x)$, isto é, a derivada primeira de F(x) é igual f(x).

Exemplo

A função $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$, pois a derivada $F'(x) = 2x$.

Note que usamos o termo uma primitiva de f(x), por que?

Observe que todas as funções abaixo têm a mesma derivada 2x.

- $F(x) = x^2$
- $G(x) = x^2 + 2$
- $H(x) = x^2 - 1$

A diferença entre as funções acima é a constante *(o número)*, ou seja, uma função possui inúmeras primitivas diferindo apenas na constante.

Uma primitiva também é denominada *antiderivada*.

- O processo através do qual se calcula uma primitiva de uma função denomina-se *integral*.
- Calcular a integral de f(x) significa encontrar F(x) tal que $F'(x) = f(x)$.

E x e r c í c i o s – 5.1

1) Calcule as integrais indefinidas abaixo.

a) $\int (3x^2 - 2x + 1)dx$

b) $\int (x^2 + \frac{1}{x})dx$

c) $\int (\frac{5}{x} + e^x)dx$

d) $\int (2^x + \frac{1}{2})dx$

e) $\int (4x + x^2 - x^3 + 3x^4)dx$

f) $\int \sqrt{x}\, dx$

g) $\int \frac{1}{x^2} dx$

h) $\int (9e^x + 3^x)dx$

i) $\int \frac{5}{x^3} dx$

j) $\int 3dx$

k) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$

5.2. A integral indefinida

Denominamos *integral indefinida* de f(x), e representamos por $\int f(x)dx$, ao conjunto de todas as primitivas de f(x).

Indicamos por: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$ (c é um número real)

A seguir mostramos umas regras de integração:

- $\int k\,dx = kx + c$
- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $(n \neq -1)$
- $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
- $\int [f(x) + g(x)] = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\int k.f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

Observe os exemplos abaixo:

a) $\int 2\,dx = 2x + c$

b) $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + c$

c) $\int 5^x dx = \dfrac{5^x}{\ln 5} + c$

d) $\int (x^3 + x^2 - x + 7)dx = \int x^3 dx + \int x^2 dx - \int x\, dx + \int 7\, dx =$

$\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 7x + c$

e) $\int 8x^3\, dx = 8\int x^3\, dx = 8.\dfrac{x^4}{4} + c = 2x^4 + c$

Exercícios – 5.2

1) Calcule:

a) $\int_{1}^{3} 2\,dx$

b) $\int_{-1}^{2} -3\,dx$

c) $\int_{2}^{5} 4x\,dx$

d) $\int_{0}^{4} (-2x+3)\,dx$

e) $\int_{1}^{2} 3x^2\,dx$

f) $\int_{0}^{10} (x^2+6)\,dx$

g) $\int_{1}^{3} (x^2+x+1)\,dx$

h) $\int_{0}^{1} e^{x}\, dx$

i) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$

5.3. A Integral definida

Seja f(x) uma função real contínua num intervalo [a, b]. Definimos *integral definida* de f(x) de a até b, e indicamos por $\int_a^b f(x)dx$, ao número real dado por:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)\text{, onde F(x) é uma primitiva de f.}$$

Exemplo

Calcular $\int_3^6 x^2 dx$.

Resolução

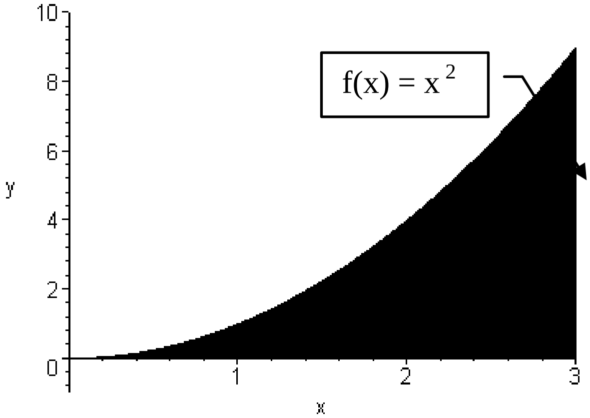
$$\int_3^6 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_3^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 108 - 9 = 99$$

5.4. Aplicação da integral definida cálculo de áreas

Uma das aplicações da integral é no cálculo de áreas limitadas por uma curva e o eixo dos x ou entre curvas.

Exemplo

Calcular a área sombreada no gráfico abaixo.



Resolução

Calcular a área sombreada significa calcular a integral $\int_0^3 x^2 dx$.

Então:

$$\text{Área} = \int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{27}{3} - \frac{0}{3} = 9 \text{ u.a.} \quad \text{(u.a. = unidade de área)}$$

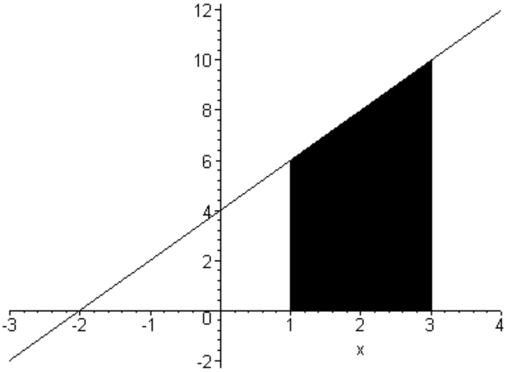
- Se o valor da integral definida num intervalo [a, b] for negativo, então a área, limitada pela curva e o eixo 0x, naquele intervalo, é igual ao módulo do valor da integral.

$$\int_a^b f(x)dx = |F(a) - F(b)|$$

E x e r c í c i o s – 5.3

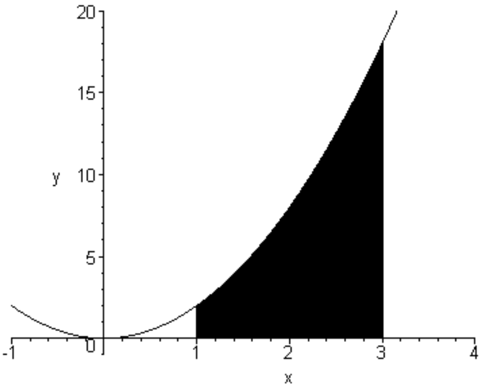
2) Calcular as áreas sombreadas:

a)

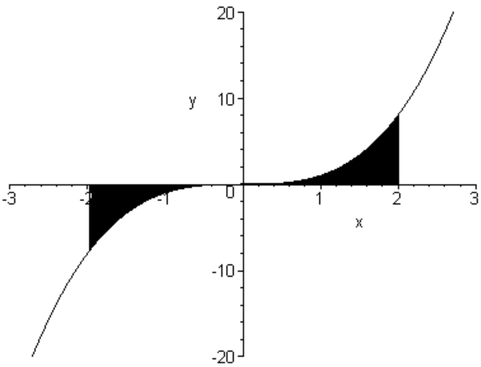


b)

$f(x) = x^2$

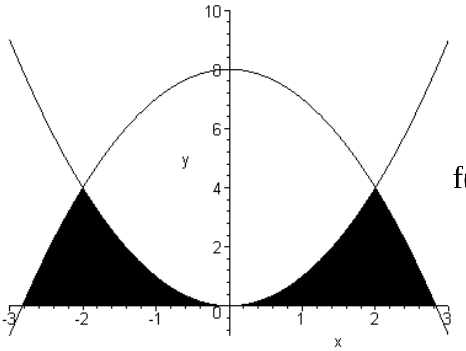


c)



$f(x) = x^3$

d)



$f(x) = x^2$

$f(x) = -x^2 + 8$

Apêndice A - Potenciação

Potência é um produto de fatores iguais: $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$

- O fator repetido (no caso, 3) chama-se **base.**
- O número de fatores (no caso, 5) chama-se **expoente.**
- O resultado da operação (no caso, 243) chama-se **potência.**

$$a^n = \underbrace{a.a.a \ldots a.a}_{n}, \text{ em que } \mathbf{a} \in \mathbf{Z^*}, n \in \mathbf{N} \text{ e } n \geq 2.$$

Propriedades

- ♣ $a^1 = a$ — Ex. $7^1 = 7$
- ♣ $a^0 = 1$ — Ex. $(-10)^0 = 1$
- ♣ $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ — Ex. $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
- ♣ $a^{\left(\frac{p}{n}\right)} = \sqrt[n]{a^p}$ — Ex. $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

Exercícios

1) Calcule:

a) 3^{2}

b) -5^{2}

c) $(-5)^{2}$

d) $(-4)^{3}$

e) -4^{3}

f) 8^{0}

g) 5^{-2}

h) $(-7)^{0}$

i) $-10^{2/3}$

j) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$

k) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$

l) $2^{-3/5}$

m) $(0,5)^{-3}$

n) $(1,2)^{2}$

o) $(0,01)^{5}$

p) $(-2,5)^{0}$

q) 1^{100}

r) -1^{5000}

s) $(0,7)^{-2}$

t) $(0,05)^{-4/3}$

u) $10^{1/2}$

v) $(0,1)^{-1/2}$

w) $1.000^{-1/3}$

Apêndice B - Produtos Notáveis

- Quadrado da soma de dois termos: $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

- Quadrado da diferença de dois termos: $(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$

- Produto da soma pela diferença de dois termos: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exercícios

1. Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

   a) $(x + 3)^2$

   b) $(2y + 4)^2$

   c) $(2x + 3y)^2$

   d) $(2a - b)^2$

   e) $(ab + 1)^2$

   f) $(m + 3a)^2$

   g) $(3x - 2)^2$

   h) $(2y - 6)^2$

   i) $(4a - 3)^2$

j) $(m - 7b)^2$

k) $(7x - 5b)^2$

l) $(xy - 2ab)^2$

m) $(x + 2)(x - 2) =$

n) $(y + 5)(y - 5) =$

o) $(2x - 7)(2x + 7) =$

p) $(xy + 6)(xy - 6) =$

Apêndice C - Equação de 1°. Grau

Denominamos de *equação de 1°. grau* à equação do tipo; **a**.x + **b** = 0, onde **a** ≠ 0.

Resolver uma equação de 1º grau ou determinar sua raiz significa encontrar um valor para a variável x de modo que satisfaça a igualdade.

A raiz de **a**.x + **b** = 0 é dada por: $x = \frac{-b}{a}$

Exemplo: Resolver a equação 5x – 1 = 14.

Resolução: 5x – 1 = 14

5x = 14 + 1

5x = 15

$x = \frac{15}{5}$

x = 3 ⇒ S = {3}

Verificação: 5 . 3 – 1 = 14

15 – 1 = 14

14 = 14, logo x = 3 é raiz da equação

Exercícios

1. Resolver as equações abaixo.

a) $x - 2 = 12$

b) $4 - x = 7$

c) $5x - 1 = 24$

d) $1 - 3x = 4$

e) $2x - 27 = 5x$

f) $-3x + \frac{1}{2} = 4x - \frac{1}{3}$

g) $0{,}2x - 5 = 10 - 0{,}3x$

h) $5(x + 12) = x$

i) $2x = 5(x + 3)$

j) $4(x - 1) = 2(x - 4)$

Apêndice D - Equação de 2º. grau

Denominamos de *equação de 2º. Grau* a toda igualdade do tipo:
$a.x^2 + b.x + c = 0$,
em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2.a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a} \end{cases}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4.a.c$$

Exemplo: Resolver a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$

Resolução:

- Identificar os elementos → $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$.
- Calcular Δ → $\Delta = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4$.
- Calcular x_1 → $x_1 = \dfrac{-(-4) + \sqrt{4}}{2.1} = \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$
- Calcular x_2 → $x_2 = \dfrac{-(-4) - \sqrt{4}}{2.1} = \dfrac{4-2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Exercícios

1. Resolver as equações a seguir.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $6x^2 + x - 1 = 0$

c) $-16x^2 + 8x - 1 = 0$

d) $2x^2 – 5x + 6 = 0$

e) $-9x^2 + 6x - 5 = 0$

f) $x^2 – 3x = 0$

g) $x^2 + 8x = 0$

h) $5x^2 – 18x = 0$

i) $3x^2 + x = 0$

j) $x^2 – 25 = 0$

k) $25x^2 – 9 = 0$

l) $x^2 + 25 = 0$

m) $x^2 – 49 = 0$

n) $3x^2 + 108 = 0$

o) $3x^2 + 15 = 0$

p) $(x + 2)^2 + (x – 2)^2 = 106$

q) $(x + 3)^2 = 6.(x + 2)$

r) $(2x – 1)^2 = 25$

s) $4x^2 – 4x + 1 = 4$

t) $(2 – x)^2 + 2 = (2x + 1)^2 + 10$

u) $x^2 + x + 5 = 0$

v) $x^2\ 2x – 1 = 0$

w) $9x^2 – 6x + 1 = 0$

x) $(x – 1)(x – 2) – 12 = 0$

y) $6x^2 + x – 1 = 0$

Apêndice E - Funções modelos aplicadas à economia - I

A utilização de *funções matemáticas modelos* a fim de descrever os comportamentos de grandezas relacionadas à *economia* é uma prática comum e necessária, uma vez que através do uso dessa ferramenta é possível, dentro de certa margem de segurança, obter-se uma previsão do comportamento daquelas quando associadas à produção, à demanda, à oferta, ao mercado etc.

Aqui iremos simplesmente aplicar algumas funções já estudas à alguns conceitos de economia.

- *Função Custo Fixo* **(FCF):** *"é o custo de produção que independe de fatores de produção."* Ex.: aluguel de imóveis, IPTU, seguro etc..
- *Função Custo Variável* **(FCV)**: *"é o custo de produção que depende da quantidade produzida."* Ex.: matéria-prima, hora extra de empregado, consumo de energia etc..
- *Custo Total*: **(CT)**: *"é a soma dos custos fixos e variáveis, i.e.,*

  ***CT = CF + CV**."*
- *Receita* **(R(q))**: *"é o que se recebe pela venda da produção, i.e.,*

  ***R(q) = p.q**."*

- *Lucro* **(L(q))**: *"é diferença entre a receita e o custo total, i.e.,*

  L(q) = R(q) – CT."

✍ Quando o *lucro* é zero, i.e., quando *receita = custo total*, temos um *ponto de empate* (**break-even)**.

◈ O preço de um bem ou serviço está associado ao seu custo de produção e à margem de lucro que se almeja. Por outro lado sabe-se que a procura de determinado bem ou serviço é maior tanto quanto for menor seu preço. Logo, as grandezas, *demanda* e *oferta,* estão relacionadas de modo *inversamente proporcional*, i.e., o aumento de uma depende da diminuição da outra. O preço que iguala as grandezas, *oferta* e *demanda,* é denominado *preço de equilíbrio*.

Vamos ilustrar com um exemplo.

Um fábrica produz determinado objeto que obedece às seguintes funções demanda e oferta respectivamente; $p_d = 80 - q$ e $p_o = -100 + 5q$. Determine o preço e a quantidade de equilíbrio desse produto.

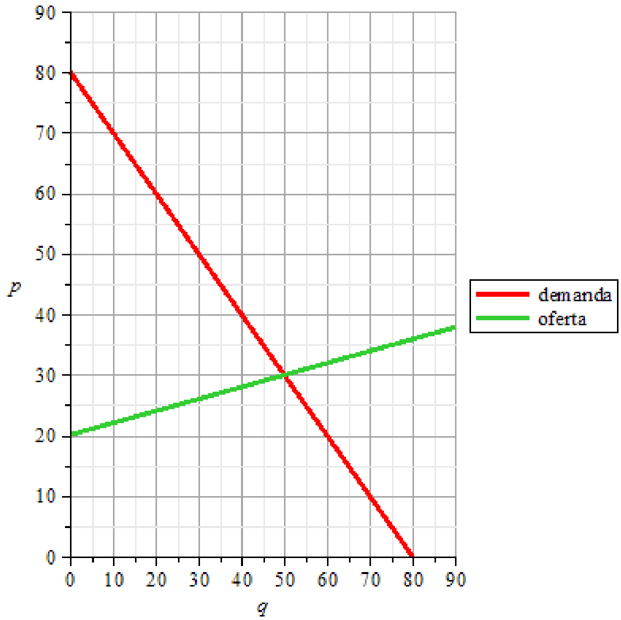
Resolução

$$\left.\begin{array}{l} p_d = 80 - p \\ p_o = -100 + 5q \end{array}\right\} \rightarrow p_p = p_o \;\therefore\; 80 - p = -100 + 5q \Rightarrow 6q = 180$$

$$q = \frac{180}{6} = 30 \Rightarrow p = 50$$

Logo, o ponto de equilíbrio corresponde a $p = R\$\ 50,00$, o que corresponde a $q = 30$ unidades.

Graficamente temos:



Exercícios

1. O custo de produção de determinada mercadoria é dado por um custo fixo de R$ 32,00, que inclui despesas como salário, energia elétrica, água e impostos mais um custo variável de R$ 5,00 por peça produzida. Considerando a receita da mercadoria, isto é, o preço de venda seja de R$ 82,00, determine a função lucro dessa mercadoria, que calcula o lucro de acordo com o número de unidades vendidas.

2. Uma fábrica de bicicletas possui um custo fixo de R$ 5.000,00 mais um custo variável de R$ 100,00 por bicicleta produzida. O preço de venda de cada bicicleta é igual a R$ 150,00. Determine a função lucro e o número de bicicletas a serem vendidas para que o lucro seja igual a R$ 20 000,00.

3. O custo variável médio de produção de certo bem é de R$ 12,00 e o custo fixo associado à produção é de R$ 60,00 para quantidades variáveis na faixa de zero a 1000 unidades. Se o preço de venda na mesma faixa, é de R$ 20,00 por unidade, identificar:
   a) Função custo total (CT).
   b) Função receita total (RT).
   c) Função lucro total (LT).
   d) Break-even point (ponto de nivelamento).
   e) Produção necessária para um lucro de R$ 3.940,00.

4. O preço de venda de um produto é de R$ 15,00 / unidade, na faixa de zero a 30.000 unidades. A venda de 5.000 unidades dá um lucro total de R$ 10.000,00. Sabendo que o custo fixo de produção na mesma faixa é de R$ 1.800,00, calcular:
   a) O custo variável para uma produção de 5.000 unidades.
   b) O custo unitário de produção.
   c) O ponto de nivelamento.
   d) A produção necessária para um lucro de R$ 50.000,00.

5. Quando o preço de um bem é R$ 35,00; 25 unidades são oferecidas e, quando o preço é R$ 45,00; 40 unidades são oferecidas. Achar a equação de oferta, supondo-a linear para x unidades do bem a um preço p.

6. Quando o preço é de R$ 60,00; 10 canetas são vendidas, porém , quando o preço é de R$ 50,00 , são vendidas 16 canetas. Achar a equação de demanda linear para a quantidade x de canetas a um preço p.

7. Com base nas equações de oferta e demanda dos exemplos 5 e 6, calcule o preço de equilíbrio, mostrando-o graficamente.

8. Se um produto é vendido por R$ 240,00, com um lucro de 20% sobre o custo de produção, determine seu custo de produção.

9. A venda de um produto é realizada obtendo-se um lucro de 30% sobre o preço de venda. Sabendo-se que o custo total de produção desse produto é de R$ 700,00, qual seu valor de venda?

10. Uma empresa que produz componentes eletrônicos para sistemas de injeção eletrônica de carros, tem funções de custo total $C(x) = 10x+12$ e de receita $R(x) = 2x^2$ referentes à produção e à venda de x unidades do produto. Quantos componentes devem ser vendidos para que a empresa não tenha prejuízo? Se forem produzidas 12 unidades do produto a empresa tem lucro?

Apêndice F - Funções modelos aplicadas à economia - II

Juros Simples

A capitalização através de *juros simples*, ou seja, quando os *juros* são calculados apenas sobre o capital inicial empregado é calculada através da fórmula:

$$M = P(1 + i.t)$$

Onde:

- M é o *montante*, ou seja, *principal* + *juros*.
- P é capital inicial empregado (*Principal*);
- i é a taxa percentual unitária;
- t o período de capitalização.

Exemplo

1) Um capital de R\$ 2.768,34 foi aplicado durante 3,5 anos a uma taxa de 1,7% a.m. Que montante pode ser retirado ao fim do período de aplicação se os juros aplicados foram calculados em regime de juros simples?

Resolução

$$\left.\begin{array}{l} P = 2.768,34 \\ i = 1,7\% = 0.017 \\ t = 3,5\,a. = 42\,m. \end{array}\right\} \Rightarrow M = P(1 + i.t) \therefore M = 2.768,34(1 + 0,017.42) \rightarrow M = R\$\ 4.744,93$$

2) Quanto tempo um capital precisa ser aplicado em regime de juros simples a uma de 0,5% a.m. para que renda 100% de juros?

<u>*Resolução*</u>

$$\left.\begin{array}{l} M = P(1+0.05.t) \\ M = 2P \end{array}\right\} \rightarrow 2P = P(1+0.05t) \Rightarrow t = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ meses.}$$

<u>*Juros Compostos*</u>

A capitalização através de *juros compostos*, ou seja, quando os *juros* são calculados sobre o *montante* anterior a cada período, é calculada através da fórmula:

$$M = P(1+\frac{i}{n})^{n.t}$$

Onde:

- *M* é o *montante*, ou seja, *principal* + *juros*.
- *P* é capital inicial empregado (*Principal*);
- i é a taxa percentual unitária;
- t o período de capitalização;
- n é o número de capitalizações durante o período *t*.

Exemplo

1) Um título bancário foi adquirido por R$ 5.000,00, resgatável em dois anos. Sabendo-se que o banco paga uma taxa de 20% a.a. com capitalização trimestral, então, qual o valor desse título na data prevista para seu resgate?

<u>*Resolução*</u>

Aplicando a fórmula **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} P = 5.000 \\ i = 0,20 \\ t = 2 \\ n = \dfrac{12}{3} = 4 \end{array}\right\} \to M = 5000.(1+\frac{0.20}{4})^{4\times 2} \therefore M = R\$\ 7.387,27$$

2) Quanto tempo levará para que um investimento de R$ 10.000,00 dobre se a taxa de juros é de 17% a.a. e os juros são capitalizados bimestralmente?

<u>*Resolução*</u>

$$20000 = 1000(1+\frac{0.17}{6})^{6\times t} \Rightarrow 2 = 1,028^{6t} \therefore\ t = 4,14\ anos$$

Exercícios

1) Expresse, por meio de uma função de *x*, as seguintes operações financeiras;

   a) Aumento de 12%
   b) Aumento de 7%
   c) Desconto de 5%
   d) Desconto de 13,6%
   e) Aumento de 100%

2) Um capital de R$ 2.000,00 foi aplicado durante 5 anos a uma taxa de 1,5% a.m.. Que montante pode ser retirado ao fim do período de aplicação se os juros aplicados foram calculados em regime de juros simples?

3) Quanto tempo um investimento deve permanecer aplicado a uma taxa de 5% a.a. a juros simples de modo que dobre seu valor?

4) Baseando-se no enunciado da questão 3) calcule o tempo no caso dos juros serem compostos e o regime de capitalização anual.

5) Calcule os juros ganhos em um investimento de R$ 10.000,0, em regime de capitalização composto a uma taxa de 9% a.a. com capitalização:

a) Anual, após 3 anos.
b) Mensal, após 5 meses.
c) Semestral, após 2 anos.
d) Trimestral, após 7 meses.
e) Bimestral, após 45 dias.

6) Uma máquina usada tem seu preço calculado através da fórmula $V(x) = 8.500 \times 0,9^x$, onde x representa o ano após sua compra, sendo $x = 0$ o ano em que foi comprada.

a) Calcule seu preço após 6 anos da compra.
b) Calcule seu preço inicial.
c) Que percentual de depreciação essa máquina sofre anualmente?
d) Após quanto tempo seu valor será R$ 3.293,07?

7) Uma cidade no ano de 2000 tem uma população de 1.350.000 habitantes e, a partir de então, sua população cresce exponencialmente a uma taxa de 2,3% ao ano.

a) Obtenha uma fórmula que possibilite calcular o número de habitantes x anos após 2000.
b) Estime a população dessa cidade em 2015.
c) Em que ano, aproximadamente a população será de 1.734.173 habitantes?

8) Um jovem com 20 anos de idade, já pensando em sua aposentadoria, resolve vender seu carro por R$ 36.000,00 e depositar todo esse dinheiro em uma caderneta de poupança que rende 0,8% ao mês. Sabendo que o regime de capitalização é composto e que, segundo os analistas financeiros, esse percentual nunca cairá, ele decide só retirar o montante quando ele tiver 55 anos de idade. Faça uma estimativa de quanto ele poderá sacar na data prevista.

9) Em regime composto com capitalização mensal, a que taxa uma capital de R$ 10.000,00 dobrará em 1 ano?

10) Que taxa anual equivale à taxa 8% semestral?

11) Qual a taxa anual equivalente a 0,0% ao mês?

12) No final de 2 anos, deve-se efetuar um pagamento de R$ 200.000,00 referente ao valor de um empréstimo contraído hoje, mais os juros devidos (já incluídos no valor do pagamento), correspondentes a uma taxa de 4% ao mês. Pergunta-se: Qual o valor emprestado?

13) (CONCURSO BANCO DO BRASIL) Um capital de R$ 2.500,00 esteve aplicado à taxa mensal de 2%, num regime de capitalização composta. Após um período de 2 meses, os juros resultantes dessa aplicação serão:

AUTORES

LIMA, Múcio de Araújo

Professor das Faculdades Unifuturo, Especialista Em Gestão Empresarial pela FGV, MBA em Marketing pela FGV, Especialista em Redes pela UFRN, MHB em Gestão Hospitalar pela FECAP, Graduação em Direito pelo UNIPE, Graduação em Matemática pela IONA COLLEGE, Graduação em Ciências da Computação pela IONA COLLEGE.

VANZELLA, Elídio

Doutor em modelos de decisão em saúde (Estatística) pela UFPB, mestrado em modelos de decisão em saúde, especialista em gestão de pessoas e graduado em administração. Professor na UNIFUTURO, orientador para o Programa de Mestrado em Educação da FLORIDA CHRISTIAN UNIVERSITY nos EUA e em 2018 aderiu ao Education Without Borders Program como "Professor Sem Fronteiras". Pesquisador do GCET-Grupo de Cultura e Estudos em Turismo (base CNPq).

O **GCET – Grupo de Cultura e Estudos em Turismo,** ligado ao Departamento de Turismo e Hotelaria (DTH) do Centro de Comunicação, Turismo e Artes (CCTA), faz parte da UFPB-Universidade Federal da Paraíba, e do Diretório dos Grupos de Pesquisa do CNPq. Tem o intuito de apresentar temáticas plurais, com foco nas questões de interesse acadêmico e empresarial, contribuindo para uma melhor compreensão do Turismo e da Hotelaria, no contexto do patrimônio cultural, impactos socioculturais, econômicos e ambientais, globalização, relações interculturais e comportamento do turista.